GANDRĒOLIVA

PREFÍSICA

André Oliva, BSc
Universidad de Costa Rica

Prefísica
Versión 1.0 - onesided

www.gandreoliva.org
© CC-BY-NC-SA 2016-2017 André Oliva

Esta obra cuenta con una licencia Creative Commons Attribution–NonComercial–ShareAlike 4.0 International. En resumen, esto significa que usted puede compartir y modificar esta obra, pero debe dar reconocimiento al autor, compartir cualquier modificación con la misma licencia y los usos comerciales (incluyendo venta impresa o digital, colocación de publicidad para descargar, etc.) están prohibidos.

Prefacio

Este libro ha sido creado con varios objetivos. Primero, el de ofrecer al estudiante una visión panorámica de la física basada en álgebra, con énfasis en mecánica, y con la idea de prepararlo para los cursos de Física General. Segundo, el de servir como estándar futuro para la enseñanza de la física en secundaria.

Es importante explicar varias características y restricciones que intenté desarrollar a lo largo de este libro:

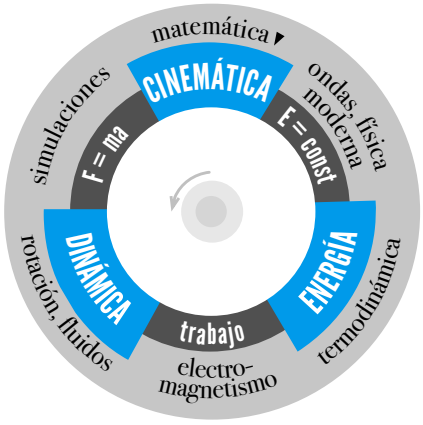


Figura 1: Estructura de los temas del curso

- **Un libro deductivo**. El principio que rige la teoría en física es que *de pocas ecuaciones salen muchas predicciones*. El libro evita fuertemente citar las ecuaciones sin ningún tipo de explicación (aunque sea cualitativa) sobre de dónde se obtienen, puesto que de la misma manera el estudiante, al resolver los problemas, debe ser deductivo y no saltarse pasos. Dicho esto, las demostraciones teóricas han sido grandemente simplificadas, de forma que lo importante detrás de ellas sea la comprensión cualitativa del proceso, y no la rigurosidad matemática. En las demostraciones que formalmente requieren integrales, se han preferido los métodos gráficos de área bajo la curva, para que el estudiante identifique rápidamente el concepto de integral cuando adquiera conocimientos de cálculo. La selección de temas estuvo grandemente influenciada por la posibilidad de ofrecer demostraciones teóricas comprensibles. Es por eso, por ejemplo, que no consideré el tema de campo eléctrico de distribuciones de carga continua, y por ende, tampoco el de capacitores.

- **Visión periférica centrada en mecánica**. La estructura con la que se desarrollaron los temas está ilustrada en la fig. 1. Los temas de mecánica son los más importantes, y se supone que deben ser estudiados con más detalle, puesto que a través de estos temas el estudiante va ganando práctica en cómo se trabaja en los cursos de Física General. Un libro introductorio solo de mecánica, sin embargo, ignora más de la mitad de la física, y limita las situaciones donde se pueden aplicar los conocimientos grandemente. El rumbo que toma este libro es, entonces, introducir las demás ramas de forma "periférica", relacionándolas con los conceptos de la mecánica y tratando de establecer una sola historia continua detrás de todo. Es por eso que el capítulo 7, de cargas eléctricas y fluidos, es en realidad un capítulo de "aplicaciones de fuerzas", y el capítulo 9, de energía eléctrica y térmica, es en realidad de "aplicaciones de energía". Los temas periféricos lanzan conexiones con otros cursos.

- **Un texto conciso**. El texto es a propósito muy conciso, y trata de resaltar solo lo esencial. Los capítulos están restringidos a una longitud del orden de 10 páginas cada uno. Hay varias razones para esto: una es que el estudiante tenga una lectura breve, que despierte preguntas, y otra es darle libertad al profesor para añadir sus propias palabras para darle sentido al texto. En el futuro, además, planeo añadir suplementos al final de cada capítulo, que ofrezcan explicaciones alternativas (aún más "suaves" y aclaradoras), así como advertencias y preguntas frecuentes. Tengo la tesis de que el estudiante aprecia mejor estos "extras" hasta *después* de leer el texto principal. Un libro de física debe ser leído varias veces y con papel y lápiz a mano para seguir la teoría. Además, el libro está pensado para un curso un ciclo lectivo.

- **Un texto lógico**. Se ha evitado al máximo el hacer referencia a conceptos que no han sido tratados o definidos en el texto. Se ha intentado definir o al menos dar una idea de lo que significa cada concepto. No se sigue un orden histórico, y se evitan las referencias históricas, excepto en el capítulo de introducción. Es por eso que se habla de carga eléctrica a partir del átomo (y no a partir del frotamiento del ámbar), y se introducen las fases de la materia hasta después de definir las fuerzas intermoleculares, de naturaleza electrostática. Como autor, aclaro que me encanta la historia de la física, pero he considerado mejor dejarla de lado para un texto introductorio, y para no seguir perpetuando los mitos históricos de muchos libros (Galileo y la Torre de Pisa, Newton y la manzana, Arquímedes y la corona, etc.).
- **Aplicaciones localizadas y actuales**. He intentado ofrecer ejemplos de aplicación en tecnología y ciencias naturales. Muchos ejemplos están localizados respecto a Costa Rica, con el objetivo de que los estudiantes puedan relacionar más el material con su experiencia cotidiana.
- **Simulaciones**. He incluido una sección de simulaciones cinemáticas (§2.6) a la hora de introducir la aceleración media. El tema se ha introducido allí por varios motivos. Primero, es el momento adecuado, puesto que en la línea lógica, el tiempo todavía es discreto cuando hablamos de Δt, pero una vez se define la aceleración como función continua $a(t)$, el estudiante sentirá más complejidad puesto que ahora hay que explicar cómo las variables continuas se pueden aproximar por variables discretas. En segundo lugar, la habilidad de hacer simulaciones y trabajar con hojas de cálculo se hace cada vez más importante; los dispositivos con capacidades de ejecutar una hoja de cálculo ahora están omnipresentes y los problemas realistas requieren aproximaciones numéricas. En tercer lugar, los argumentos por simulaciones se utilizan en el libro para explicar las ecuaciones del movimiento armónico simple y la ecuación de rapidez de propagación de una onda, imposibles de hacer de forma sencilla sin cálculo. Una vez dicho esto, hay que hacer notar que el único objetivo de la §2.6 es que el estudiante comprenda cómo funcionan las simulaciones cinemáticas, y no necesariamente enseña a realizar una.
- **Ejercicios de complejidad limitada**. En un texto introductorio debe ponerse límite a la complejidad de los problemas. La restricción general en este aspecto es que *cada literal* de cada ejercicio *se resuelva en aproximadamente dos pasos como máximo*. Esto significa que para obtener la respuesta, debería haber como máximo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Hay muchas excepciones a esta "regla": las conversiones y ecuaciones sencillas no están contempladas como "pasos". Si un problema requiere una complejidad mayor, se divide en más literales. Es importante insistir al estudiante que todo ejercicio debe ir acompañado de un diagrama, y de una estrategia. Nunca un problema se debe reducir a sustituir y despejar. En Física General, los problemas son de complejidad mayor (n ecuaciones, n incógnitas).
- **Ilustraciones**. Todas las ilustraciones han sido hechas por mí en formato vectorial. He intentado mantener un estilo gráfico coherente (*flat*), y una gama de colores muy reducida (escala de grises, anaranjado y azul). Menos colores significa que el uso de cada color es controlado y llama más la atención del estudiante. Las fotografías tienen la licencia y atribución al pie.

Contenidos

1. Introducción **1**
- 1.1. Física . . . 1
- 1.2. Cantidades físicas y unidades . . . 1
- 1.3. Conversión de unidades . . . 3
- 1.4. Redondeo, cifras significativas e incertidumbre . . . 4
- 1.5. Repaso de matemática . . . 4

2. Cinemática Unidimensional **9**
- 2.1. Distancia y rapidez media . . . 9
- 2.2. Posición y velocidad media . . . 9
- 2.3. Posición y velocidad como funciones . . . 10
- 2.4. Movimiento rectilíneo uniforme . . . 11
- 2.5. Marcos de referencia . . . 12
- 2.6. Aceleración media y simulaciones . . . 13
- 2.7. Movimiento con aceleración constante . . . 14
- 2.8. Caída libre . . . 16
- 2.9. Movimiento relativo . . . 17

3. Vectores y cinemática bidimensional **19**
- 3.1. Vectores y escalares . . . 19
- 3.2. Interpretación geométrica . . . 19
- 3.3. Descomposición en vectores componentes . . . 20
- 3.4. Componentes cartesianas de un vector; vectores unitarios 21
- 3.5. Posición, velocidad y aceleración . . . 22
- 3.6. Suma y resta por componentes . . . 23
- 3.7. Producto punto y producto cruz . . . 24
- 3.8. Tiro de proyectiles . . . 26

4. Dinámica: fuerzas **29**
- 4.1. Fuerza y leyes de Newton . . . 29
- 4.2. Primera ley de Newton . . . 29
- 4.3. Segunda ley de Newton . . . 30
- 4.4. Tercera ley de Newton . . . 31
- 4.5. Gravedad y fuerza normal . . . 33
- 4.6. Fricción . . . 34
- 4.7. Cuerdas y poleas . . . 36

5. Movimiento circular, gravitación y oscilaciones **39**
- 5.1. Movimiento circular uniforme . . . 39
- 5.2. Gravitación . . . 41
- 5.3. Campo gravitacional y órbitas circulares . . . 42
- 5.4. Resortes y oscilaciones . . . 44
- 5.5. Movimiento armónico simple . . . 44

6. Cargas eléctricas y fluidos **47**
6.1. Carga eléctrica 47
6.2. Campo eléctrico 49
6.3. Corriente eléctrica y campo magnético 50
6.4. Fuerza magnética 51
6.5. Fuerzas en la materia, presión 52
6.6. Presión atmosférica y medición de la presión 54
6.7. Flotabilidad 56

7. Trabajo y energía **59**
7.1. Trabajo 59
7.2. Trabajo de una fuerza constante y de la gravedad 59
7.3. Trabajo de un resorte 61
7.4. Energía cinética 62
7.5. Energía potencial 64
7.6. Energía mecánica 66
7.7. Potencia 69

8. Moméntum, sistemas de partículas y equilibrio **71**
8.1. Moméntum 71
8.2. Colisiones 72
8.3. Sistemas de partículas: centro de masa 75
8.4. Torque 77
8.5. Equilibrio 78

9. Energía eléctrica y térmica **81**
9.1. Energía eléctrica y su conducción 81
9.2. Generación de corriente eléctrica y motores 82
9.3. Circuitos eléctricos 83
9.4. Temperatura, fases y calor 86
9.5. Gas ideal 89

10. Ondas y física moderna **93**
10.1. Ondas mecánicas viajeras 93
10.2. Interferencia y ondas estacionarias 95
10.3. Ondas electromagnéticas 97
10.4. Óptica geométrica: reflexión 98
10.5. Óptica geométrica: refracción y dispersión 100
10.6. Física moderna 102

1 Introducción

1.1 Física

La **física** es la ciencia que estudia los principios fundamentales por los que funciona el universo. Su estudio abarca desde las partículas elementales que forman la materia-energía hasta el espacio-tiempo del universo como un todo. La física toma un fenómeno, y aplica principios teóricos para hacer un modelo del fenómeno, describirlo y hacer predicciones. Para esto, es vital el lenguaje de las matemáticas.

La física surgió de la medición, la astronomía y los principios de la ingeniería en la antigüedad. En el siglo XVII, Isaac Newton formuló las leyes básicas del movimiento y la gravedad, base de la **mecánica clásica**. En el siglo XIX, Michael Faraday, James Clerk Maxwell y otros investigaron el **electromagnetismo**, que llevó a muchas invenciones (motor, bombillo, radio, televisión, informática, etc.). En el mismo siglo también se fundó la **física térmica**, que abarca la física estadística y la termodinámica; ambas ramas estudian la energía y su transferencia entre los cuerpos. Estas tres ramas de la física constituyen la *física clásica*. A principios del siglo XX surgió la *física moderna*, con el descubrimiento de Albert Einstein de la **relatividad**, que trata con más detalle la gravedad y el movimiento de los cuerpos a altas velocidades; y la **mecánica cuántica**, que trata del movimiento e interacciones de partículas muy pequeñas, y que fue desarrollada por Heisenberg, Schrödinger y otros.

La física usualmente estudia únicamente los principios fundamentales por los que funcionan las cosas, y frecuentemente se utilizan simplificaciones para que los fenómenos puedan ser descritos con matemáticas. Por ejemplo, las interacciones entre los átomos que forman una molécula son descritos por el electromagnetismo y la mecánica cuántica, pero el estudio detallado de las diferentes combinaciones de átomos y sus propiedades es más complejo y entra en el campo de la química.

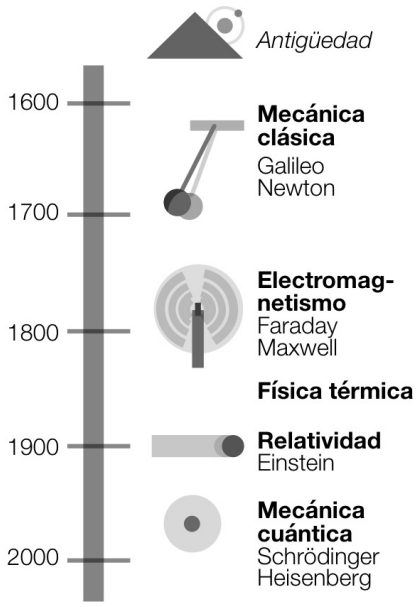


Figura 1.1: Historia y divisiones de la física

1.2 Cantidades físicas y unidades

En física se utilizan **cantidades físicas** para *medir* y hacer predicciones cuantitativas de un fenómeno dado. **Medir** es comparar una cantidad física con un patrón que llamamos **unidad de medida**. Una cantidad física, entonces, se compone de un número y una unidad de medida. Hay tres cantidades físicas fundamentales que vamos a estudiar primero: la *longitud*, el *tiempo* y la *masa*. Muchas otras cantidades físicas (como la velocidad o la energía) se pueden componer usando estas tres. Por ejemplo, el área de un rectángulo es Área = base × altura; tanto la base como la altura se miden con unidades de longitud, por lo que las unidades del área son unidades de longitud al cuadrado.

Una unidad de medida de la **longitud** es el **metro** (símbolo: m), que

Figura 1.2: Escala relativa del universo

originalmente se definió como una diezmillonésima parte del cuadrante terrestre, es decir, que un cuarto de la circunferencia terrestre mide 10 000 000 m. Una unidad de medida del **tiempo** es el **segundo** (símbolo s), originalmente definido por medio de la rotación terrestre (una rotación es 24 horas, una hora tiene 60 minutos y un minuto tiene 60 segundos). La **masa** es la medida de cuánta materia tiene un objeto, y aunque está relacionada con el **peso**, son dos conceptos diferentes. No debemos confundirlos. Una unidad de medida de la masa es el **kilogramo** (símbolo: kg), originalmente definido como la masa de un litro de agua; un litro es la cantidad de agua que cabe en una caja de 0.1 m de ancho, 0.1 m de alto y 0.1 m de largo. Ejemplos de unidades compuestas serían m/s, m^2, $kg\,m^2/s^3$. Actualmente, las unidades del SI se definen de forma más precisa: para el segundo se usa la radiación emitida por un átomo de Cesio; para el metro, la velocidad de la luz; y para el kilogramo, la masa de un cilindro metálico estándar.

Un conjunto de unidades consistentes se llama *sistema de unidades*. Las unidades *metro*, *segundo* y *kilogramo* pertenecen al **sistema internacional (SI)**. En el SI se usa un sistema de prefijos y sufijos que resumimos en la tabla 1.1.

Ejemplo 1.1. *Prefijos con unidades del SI.*

1 km son 1000 m, 1 cm son 0.01 m, 1 g son 0.001 kg, 1 ms son 0.001 s.

Tradicionalmente no se usan los prefijos mayores que *mili* para los segundos. La unidad base del sistema internacional es el *kilogramo*, no el gramo (g).

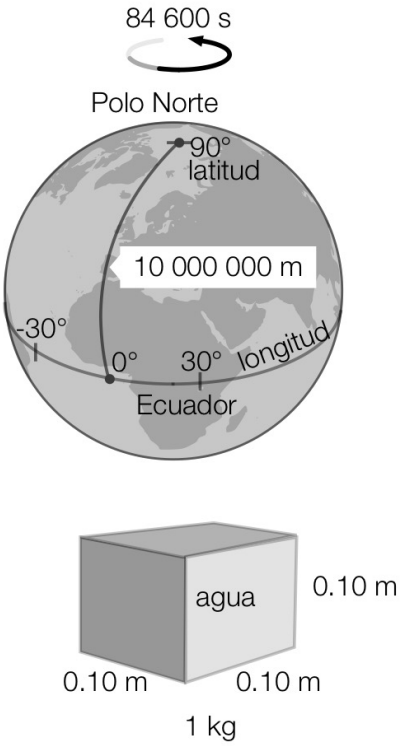


Figura 1.3: Definiciones originales de las unidades del SI

Tabla 1.2: Algunos factores de conversión

Cantidad física	Unidad	símbolo	equivalencia
Masa	tonelada métrica	ton	1000 kg
	unidad de masa atómica	u	$1.66 \cdot 10^{-27}$ kg
	libra (masa)	lb	0.454 kg
Longitud	pulgada	in	2.54 cm
	pie	ft	30.5 cm
	yarda	yd	0.914 m
	milla	mi	1609 m
	año luz	ly	$9.46 \cdot 10^{15}$ m
Volumen	litro	L	1 dm^3
	galón	gal	3.785 L
Tiempo	minuto	min	60 s
	hora	h	60 min
	día	d	24 h
	año	yr,a	365.25 d

Otras unidades, no pertenecientes al sistema internacional, y algunas unidades compuestas, pueden encontrarse en la tabla 1.2.

Las unidades a ambos lados de una ecuación deben coincidir.

Ejemplo 1.2. *Unidades de una constante.*

Suponga que tenemos la ecuación $x = b/t^2$, donde x se mide en metros y t en segundos. ¿Cuáles deben ser las unidades de b?

Solución: A ambos lados de la ecuación las unidades deben ser igua-

Prefijo	símbolo	10^n
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	$10^3 = 1000$
hecto	h	$10^2 = 100$
deca	da	$10^1 = 10$
(nada)	–	$10^0 = 1$
deci	d	$10^{-1} = 0.1$
centi	c	$10^{-2} = 0.01$
mili	m	$10^{-3} = 0.001$
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

Tabla 1.1: Prefijos del SI

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

les. Como a la izquierda tenemos m, a la derecha debemos tener m:

$$\mathrm{m} = \frac{\mathcal{U}[b]}{\mathrm{s}^2} \implies \mathcal{U}[b] = \mathrm{m\ s}^2$$

$\mathcal{U}[b]$ significa *unidades de b*.

1.3 Conversión de unidades

Para convertir unidades se utilizan *factores de conversión*. Por ejemplo,

$$1\,\mathrm{in} = 2.54\,\mathrm{cm}$$

puede escribirse también como

$$1 = \frac{2.54\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{in}}$$

podemos multiplicar este 1 de forma conveniente para convertir unidades. Las unidades por convertir deben cancelarse. Solo se pueden convertir unidades de la misma cantidad física, es decir, no se pueden convertir kilogramos en segundos, o libras en millas.

Ejemplo 1.3. *Conversión de pulgadas a centímetros.*

Convierta 15.3 pulgadas a centímetros

Solución: Ambas son unidades de longitud. Utilizamos el factor de conversión

$$15.3\,\mathrm{in} \times \frac{2.54\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{in}} = 38.9\,\mathrm{cm}$$

Ejemplo 1.4. *Varias conversiones.*

Convierta 4.8731 hg a libras

Solución: Como 100 g es 1 hg, y 454 g es 1 lb,

$$4.8731\,\mathrm{hg} \times \frac{100\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{hg}} \times \frac{1\,\mathrm{lb}}{454\,\mathrm{g}} = 1.073\,\mathrm{lb}$$

Ejemplo 1.5. *Unidades compuestas.*

Convierta 60 mi/h a m/s.

Solución:

$$60\frac{\mathrm{mi}}{\mathrm{h}} \times \frac{1609\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{mi}} \times \times \frac{1\,\mathrm{h}}{60\,\mathrm{min}} \times \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} = 27\,\mathrm{m/s}$$

Ejemplo 1.6. *Área.*

Convierta 7.05 cm^2 a m^2.

Solución: Hay que tener cuidado de multiplicar un factor de conver-

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

sión por cada dimensión.

$$7.05\,\text{cm}^2 \times \frac{(1\,\text{m})^2}{(100\,\text{cm})^2} = 7.05 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$$

1.4 Redondeo, cifras significativas e incertidumbre

Cuando leemos un número, como 4.2618, y deseamos expresarlo con menos decimales, debemos aplicar **redondeo**, es decir, si el dígito por eliminar es menor a cinco simplemente se elimina, pero si es mayor o igual a cinco se suma 1 al siguiente dígito. En nuestro ejemplo, para expresar el número 4.2618 con 3 decimales diríamos 4.262, pero para expresarlo con 2 decimales diríamos 4.26.

La cantidad de **cifras significativas** de un número es la cantidad de dígitos que se conocen con certeza sobre él. Por ejemplo, el número 4.35 tiene tres cifras significativas, mientras que el 0.0025 tiene dos (los ceros a la izquierda solo indican dónde va el punto decimal). En los números enteros con ceros a la derecha, como 80, el número de cifras significativas depende del contexto: si entre dos ciudades hay *aproximadamente* 80 km, la única cifra significativa es el 8, mientras que si hay *exactamente* 80 km, ni más ni menos, hay dos cifras significativas. Si dividimos 2.6/7.254 la calculadora muestra 0.35842294. ¿Cuántos decimales hay que dejar para la respuesta? El principio que se aplica es que *la respuesta no es más exacta que el número menos exacto*. En nuestro ejemplo, la respuesta debe darse como $2.6/7.254 = 0.36$. Saber esto es importante porque nos permite comparar nuestras respuestas con las que han obtenido otros; si las respuestas son ligeramente diferentes, es muy probable que no haya error, sino que se deba a las cifras significativas.

Cuando medimos cantidades, hay que estimar una **incertidumbre** a la medición. Una forma de estimar incertidumbres es utilizar la menor división del instrumento de medición. Por ejemplo, si medimos el largo L de un lápiz con una regla en centímetros y obtenemos 8.0, la medición sería $L = (8.0 \pm 0.1)\,\text{cm}$, lo que significa que el lápiz mide entre 7.9 y 8.1 cm. Para un experimento, cualquier medición sin su incertidumbre carece de significado.

1.5 Repaso de matemática

I. Álgebra

A. Exponentes

n es un número natural (0,1,2,...), a, b, x son números reales (ej.: 2, -5.6, $\sqrt{3}$).

- $a^n = a \cdot a \cdots n$ veces
- $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$
- $x^a / x^b = x^{a-b}$
- $a^{-n} = 1/a^n$
- $x^a x^b = x^{a+b}$
- $(x^a)^b = x^{ab}$

B. Notación científica

Ejemplos:

$$3.25 \cdot 10^3 = 3.25 \times 10 \times 10 \times 10 = 3\,250$$

símbolo	significado
$=$	igual a
$\implies$	entonces
$>$	mayor que
$<$	menor que
$\geq$	mayor o igual que
$\leq$	menor o igual que
$\approx$	aproximadamente igual a
$\neq$	no es igual a
$\propto$	proporcional a
Δx	$= x_2 - x_1$ ("delta")
$\sum$	suma
$\lvert x \rvert$	valor absoluto (x sin signo)
$\pm$	o más o menos
$\mp$	o menos o más

Tabla 1.3: Símbolos matemáticos

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

$$3.25 \cdot 10^{-3} = 3.25 \times \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.00325$$

C. Proporciones

Si $x \propto y \implies x = ky$, donde k es una constante. Entonces, $x_1 = ky_1$; $x_2 = ky_2$. Dividiendo ambas ecuaciones se cancela la k:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

D. Fórmulas notables y factorización

- $ax + bx = (a+b)x$
- $\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a}$
- $(a+b)(x+y) = ax + ay + bx + by$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

E. Ecuaciones lineales

Se hacen operaciones a ambos lados de la igualdad hasta despejar. Ej.:

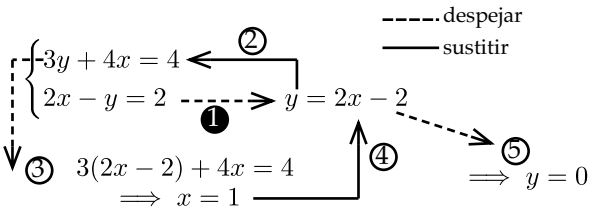
$$ax - b = 0 \implies ax - b + b = +b$$
$$\implies ax = b \implies x = b/a$$

F. Ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

G. Sistemas de ecuaciones

Se despeja una incógnita y se sustituye en la otra ecuación. Ej.:



Despejamos y de la segunda ecuación, sustituimos en la primera, resolvemos para x y luego sustituimos en cualquier ecuación para obtener y.

H. Logaritmos

Definición de logaritmo: Si $y = a^x \implies x = \log_a y$

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

El logaritmo natural es base $e = 2.718...$, es decir, $\ln x = \log_e x$. La función exponencial es $y = e^x \implies x = \ln y$. Los logaritmos base 10 se escriben sin subíndice: $y = \log x = \log_{10} x \implies 10^y = x$

mayúsc.	minúsc.	nombre
A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	épsilon
Z	ζ	dseta
H	η	eta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	ómicron
Π	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	ípsilon
Φ	ϕ	fi
X	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

Tabla 1.4: Alfabeto griego

Ejemplo 1.7. *Ecuación cúbica.*

Resolver $x^3 - bx = 0$ para x.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Solución: Factorizamos

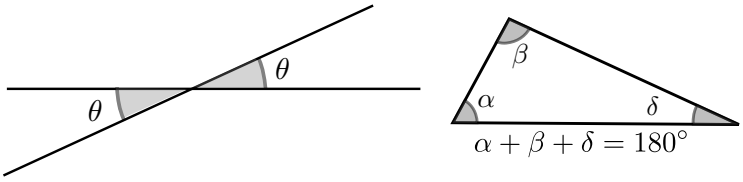
$$x(x^2 - b) = 0$$

esto implica que: o bien $x = 0$ o bien $x^2 - b = 0$. De esta última ecuación obtenemos que o bien $x = \sqrt{b}$ o bien $x = -\sqrt{b}$. Es decir, hay tres soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{b}$ y $x_3 = -\sqrt{b}$.

II. Geometría

A. Ángulos y triángulos

Los ángulos opuestos son iguales. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.



B. Trigonometría básica

$$\sin\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

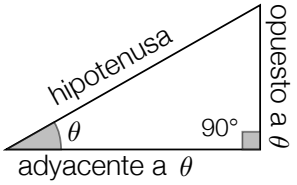


Figura 1.4: Triángulo rectángulo

C. Círculo trigonométrico

En la fig. 1.5 se muestran algunos valores especiales de seno y coseno, y sus signos en los cuadrantes del plano cartesiano.

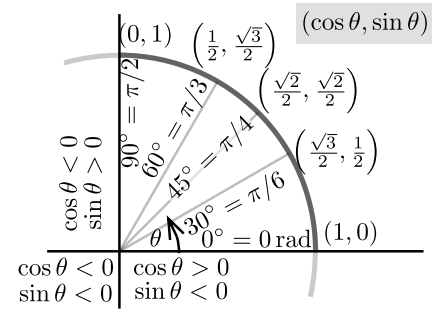
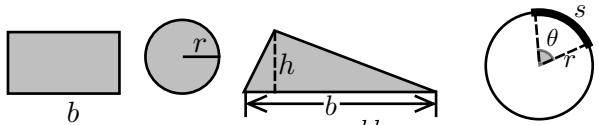


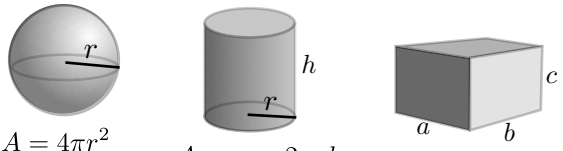
Figura 1.5: Círculo trigonométrico

D. Áreas, arco (s) y circunferencia (c)



$A = ab$ $\quad A = \pi r^2$ $\quad A = \dfrac{bh}{2}$ $\quad s = r\theta$, $c = 2\pi r$

E. Volúmenes



$A = 4\pi r^2$, $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\quad A_{\text{pared}} = 2\pi rh$, $V = \pi r^2 h$ $\quad V = abc$

F. Funciones trigonométricas inversas

Sirven para encontrar el ángulo de una función trigonométrica.

$$x = \sin\theta \implies \theta = \arcsin x$$
$$x = \cos\theta \implies \theta = \arccos x$$
$$x = \tan\theta \implies \theta = \arctan x$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

G. Identidades trigonométricas

Algunas expresiones trigonométricas pueden simplificarse con las siguientes identidades:

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$
- $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

Ejemplo 1.8. *Ángulos equivalentes.*

En la fig. 1.6, muestre que α y β son iguales.

Solución: Tenemos dos triángulos rectángulos, ADC y BDE. Primero, notamos que $\alpha + 90° + \delta = 180°$, con lo que $\delta = 90° - \alpha$. Ahora, δ y θ son ángulos opuestos, por lo que $\delta = \theta = 90° - \alpha$. Con esto, vemos que $\beta = \alpha$, que era a lo que queríamos llegar.

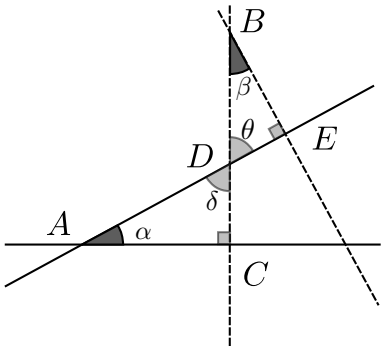


Figura 1.6: Ángulos equivalentes

Ejemplo 1.9. *Uso del teorema de Pitágoras.*

Calcule el $\cos\beta$ para el triángulo de la fig. 1.7

Solución: El $\cos\beta$ es el cateto adyacente, que no conocemos, entre la hipotenusa r. Sin embargo, podemos encontrar el cateto adyacente (llamémoslo y) con el teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = r^2 \implies y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con lo que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}$$

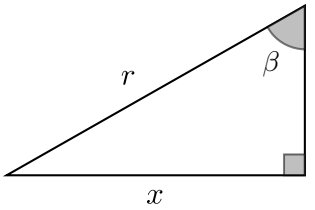
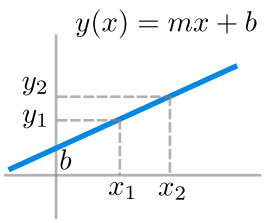


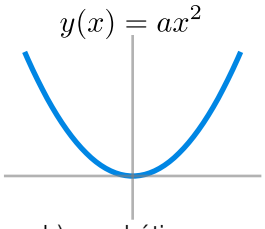
Figura 1.7: Uso del teorema de Pitágoras

III. Funciones

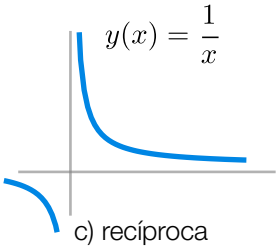
Las funciones relacionan valores de un conjunto $\{x\}$ a un conjunto $\{y\}$, y se denotan como $y(x)$. La gráfica nos permite conocer propiedades de las funciones. A continuación se muestran las gráficas de algunas funciones:



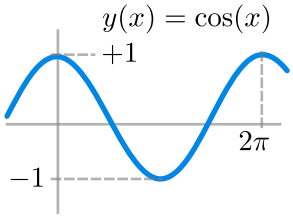
a) lineal



b) cuadrática



c) recíproca



d) coseno

a) La gráfica de la **función lineal** es una recta. Su forma general es $y = mx + b$, donde m indica la *pendiente* o inclinación de la recta con respecto al eje x, y se calcula como $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$; y b muestra el punto donde la recta interseca al eje y.

b) Las funciones **cuadráticas** forman una *parábola*, y esta apunta hacia abajo si $a > 0$, o hacia arriba si $a < 0$.

c) La curva que forma la función **recíproca** es una *hipérbola*, y se dispara hacia arriba con valores de x positivos cercanos a cero, y con valores grandes de x se va acercando cada vez más al eje x.

d) La curva de la función **coseno** sube y baja entre $y = +1$ y $y = -1$, y se repite cada 2π, por lo que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. La de la función seno es similar.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

2 Cinemática Unidimensional

2.1 Distancia y rapidez media

La **cinemática** es la rama de la mecánica que estudia la descripción del movimiento (sin importar qué lo causa). Primero, debemos definir el concepto de **partícula**: un objeto pequeño comparado con su alrededor, que posee masa. Dependiendo del contexto podemos considerar algo como partícula o no: por ejemplo, la Tierra no es partícula respecto a una persona parada sobre ella, pero sí puede ser una partícula respecto al sistema solar.

Imaginemos que vamos de viaje desde San José hasta Santa Cruz, como en la fig. 2.1. La **distancia** medida *a lo largo del trayecto* es 233 km. Vamos a definir la **rapidez media recorrida** como

Figura 2.1: Viaje San José–Santa Cruz

$$\text{rapidez media recorrida} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}}$$

Si recorremos el trayecto en 3.5 h, la rapidez media recorrida es de $233/3.5 \approx 67\,\text{km/h}$. Observe que la distancia recorrida es siempre un número positivo (no decimos nunca que Santa Cruz está a -233 km de San José); la rapidez media recorrida también siempre es positiva.

Punto clave
La distancia recorrida y la rapidez media recorrida solo pueden ser > 0

Ejemplo 2.1. *Viaje Heredia–Alajuela.*

¿Cuánto tiempo se tarda en ir en carro entre Heredia y Alajuela ida y vuelta si ambas ciudades están separadas por 12 km y se viaja con una rapidez media recorrida de 40 km/h?

Solución: Multiplicamos la distancia recorrida por 2, dado que el viaje es ida y vuelta. Tiempo $= 2 \times$ distancia recorrida/rapidez media recorrida $= 24/40 = 0.6\,\text{h} = 36\,\text{min}$.

2.2 Posición y velocidad media

Consideremos un video como el de la fig. 2.2, en el que en el instante de tiempo A, que en la barra de tiempo corresponde a 10 s desde que empezó el video, el perro camina hacia la derecha. En B ($t = 18\,\text{s}$), el perro se detiene, y luego, corre hacia la izquierda, de forma que en el punto C ($t = 20\,\text{s}$) comienza a cavar un agujero. Ahora, coloquemos una regla que nos permita medir la **posición** del perro en cada punto. Podemos elegir positivo hacia la derecha o hacia la izquierda, y también podemos elegir cualquier punto como cero. Una vez hechas estas elecciones, deben ser consistentes a lo largo de todo el problema.

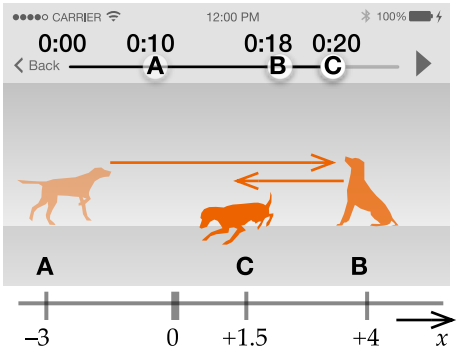


Figura 2.2: Video de un perro, considerado como partícula en nuestro análisis.

El **desplazamiento** entre dos puntos, A y B, es el cambio de posición:

$$\Delta x = x_B - x_A$$

En nuestro ejemplo, el desplazamiento entre A y B es $\Delta x_{BA} = 4 - (-3) = 7\,\text{m}$. Además, $\Delta x_{CB} = x_C - x_B = 1.5 - 4 = -2.5\,\text{m}$. El desplazamiento total del perro desde A hasta C es $\Delta x_{CA} = x_C - x_A = 1.5 - (-3) = 4.5$, es decir, al final de su recorrido quedó a un punto 4.5 m hacia la derecha del punto inicial A.

La **velocidad media** entre dos puntos A y B es el desplazamiento entre esos puntos dividido entre el tiempo que tarda en recorrerlos:

$$\overline{v} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

En nuestro ejemplo del video, entre A y B, el perro tiene una velocidad media de $\overline{v}_{BA} = +7.0/(18-10) = +0.86\,\text{m/s}$; y entre B y C, una velocidad media de $\overline{v}_{CB} = -2.5/(20-18) = -1.25\,\text{m/s}$. Los signos indican la *dirección* de la velocidad; hacia la derecha es positivo y hacia la izquierda es negativo, según lo que eligimos al principio del problema.

Retomemos el ejemplo del viaje ida y vuelta Heredia–Alajuela. Habíamos dicho que la distancia recorrida entre ambas ciudades es 12 km, y la rapidez media recorrida es 40 km/h. El desplazamiento total del carro, sin embargo, es cero: la posición final es igual a la posición inicial. Por lo tanto, la velocidad media también es cero, puesto que el desplazamiento es cero.

Puntos clave

- Desplazamiento: cambio de posición
- Velocidad media: cambio de posición en el tiempo
- El desplazamiento y la velocidad media pueden ser > 0, < 0 o $= 0$

Ejemplo 2.2. *Partícula.*

Cuando $t_A = 6\,\text{min}$, una particula se encuentra en $x_A = +5\,\text{km}$. Luego, se mueve hasta B con velocidad promedio de $\overline{v}_{AB} = -4\,\text{km/min}$, y llega cuando $t_B = 12\,\text{min}$. ¿Cuál es la posición final de la partícula?

Solución: Despejando, $\overline{v}_{BA} = (x_B - x_A)/(t_B - t_A) \implies x_B = x_A + \overline{v}_{BA}(t_B - t_A)$. Sustituyendo, $x_B = 5 - 4(12-6) = -19\,\text{km}$.

Figura 2.3: Velocímetro de un carro. [CC-BY 2009 flickr:TheCarSpy]

2.3 Posición y velocidad como funciones

Como vimos en la §2.2, una partícula se encuentra en una cierta posición en cada instante de tiempo, por lo que la *posición es una función del tiempo*:

$$x = x(t)$$

Si conocemos el criterio de la función $x(t)$, podremos conocer la posición de la partícula en *cualquier* instante, sin necesidad de medirla cada vez.

Si vamos en carro desde San José hasta Playa Jacó, recorremos unos 100 km en aproximadamente 1.5 h, con lo que la rapidez media es de 67 km/h. Sin embargo, muy difícilmente la rapidez es la misma en todo momento: hay constantes variaciones. En la §2.2 vimos que la velocidad media se mide entre dos puntos A y B. Definimos la **velocidad instantánea** como

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \Delta t \text{ pequeño}$$

Necesitamos que Δt sea tan pequeño como sea posible para que en lugar de medir la velocidad en un intervalo, la midamos en un instante. La velocidad instantánea es también una función del tiempo (en cada instante hay una velocidad):

$$v = v(t)$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

La **rapidez instantánea** se define como el valor absoluto de la velocidad instantánea: en un instante dado t_0, un carro puede tener una velocidad de $v(t_0) = +67\,\text{km/h}$ o $v(t_0) = -67\,\text{km/h}$, pero su rapidez instantánea en ambos casos es de $|v(t_0)| = 67\,\text{km/h}$. El velocímetro de un carro mide la rapidez instantánea. De ahora en adelante, cuando hablemos sobre *velocidad* y *rapidez*, nos referimos sus valores instantáneos.

2.4 Movimiento rectilíneo uniforme

Consideremos una partícula que se mueve en todo momento con una velocidad constante v. En este caso, la velocidad media coincide siempre con la velocidad instantánea. Supongamos una partícula que se mueve desde x_0 hasta x, en un tiempo t. Su velocidad media sería

$$v = \frac{x - x_0}{t}$$

Podemos despejar x, y como v es constante, hemos encontrado la función posición $x(t)$:

$$v = \frac{x - x_0}{t} \implies vt = x - x_0$$

$$\implies x(t) = x_0 + vt \tag{2.1}$$

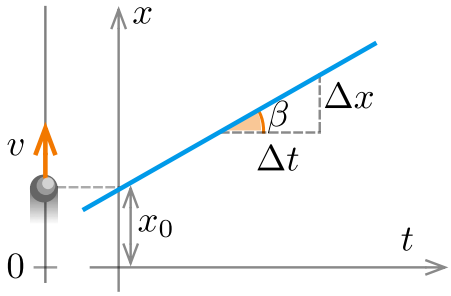


Figura 2.4: Movimiento rectilíneo uniforme

Grafiquemos esta función lineal (fig. 2.4). La gráfica de x contra t muestra una recta. En el eje x es donde en realidad se mueve la partícula, y como puede observarse, la posición de la partícula incrementa a medida que pasa el tiempo. Vemos que x_0 es la **posición inicial** de la partícula, es decir, cuando $t = 0$, $x(0) = x_0$. Por otro lado, la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

por lo que la pendiente m representa la velocidad v de la partícula. Para visualizarlo mejor, hemos puesto en la gráfica un ángulo β, que no tiene interpretación física. Entre más grande sea la velocidad de la partícula, mayor será β, es decir, la recta será más inclinada. Un ángulo $\beta = 0$ indicaría una velocidad cero, es decir, una recta horizontal nos muestra una partícula que permanece siempre en la misma posición.

Puntos clave

- Ecuación del movimiento rectilíneo uniforme: $x = x_0 + vt$
- Posición: **función lineal** del tiempo

Ejemplo 2.3. *Atleta.*

Un atleta corre a 2.4 m/s desde la línea de salida de una pista. a) Escriba la posición del atleta respecto a la línea de salida como función del tiempo. b) ¿Cuál es la posición del atleta a los 3 segundos de iniciar su carrera? c) Calcule el tiempo que le toma al atleta correr 50 m.

Solución: a) Elegimos que el origen $x = 0$, sea la línea de salida de la pista, y como esa es la posición inicial del atleta, $x_0 = 0$. Elegimos también que la dirección hacia la que corre el atleta sea positiva. Entonces, la posición del atleta en todo momento sería

$$x(t) = 2.4t$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

b) $x(3) = 2.4 \times 3 = 7.2\,\text{m}$. c) $x = vt \implies t = x/v = 50/2.4 \approx 21\,\text{s}$.

Ejemplo 2.4. *Pájaros.*

Dos pájaros se encuentran en reposo en un árbol. Uno de ellos sale volando con una velocidad constante de $3\,\text{m/s}$. $4\,\text{s}$ después, el otro pájaro sale volando con una velocidad de $6\,\text{m/s}$. ¿En qué momento el segundo alcanzará al primero?

Solución: La posición inicial de ambos pájaros es $x_{10} = x_{20} = 0$. Escribimos las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme:

$$x_1 = v_1 t_1; \qquad x_2 = v_2 t_2$$

Sin embargo, $t_2 = t_1 - 4$, puesto que el pájaro 2 salió $4\,\text{s}$ después que el pájaro 1 (cuando $t_1 = 4$, $t_2 = 0$). En el momento en el que el pájaro 2 alcanza al pájaro 1, $x_1 = x_2$. Por lo tanto,

$$x_1 = x_2 \implies v_1 t_1 = v_2(t_1 - 4) \implies t_1 = 8\,\text{s}$$

Ejemplo 2.5. *Horario de trenes.*

Varios pasajeros desean transportarse desde Heredia (H) hasta Cartago (C) en tren, haciendo transbordo en San José. El tren de Heredia tarda $20\,\text{min}$ en llegar a San José, y recorre unos $10\,\text{km}$. El tren de Cartago sale desde esa ciudad, que se encuentra a unos $25\,\text{km}$ de San José. Ambos trenes tienen la misma rapidez, y su movimiento es aproximadamente en línea recta. a) Calcule la velocidad del tren de Heredia. b) ¿Cuál será entonces la velocidad del tren de Cartago? c) Calcule la duración del viaje Cartago–San José. ¿En qué momento debe salir el tren de Cartago para que los pasajeros no tengan que esperar por el transbordo?

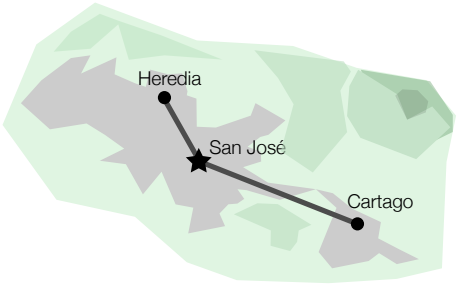


Figura 2.5: Horario de trenes

Solución: Cada trayecto puede verse como un movimiento rectilíneo uniforme. Elegimos $x_0 = 0$ en Heredia, $x_1 = 10\,\text{km}$ en San José, y $x_2 = 10 + 25 = 35\,\text{km}$ en Cartago. a) La velocidad del tren de Heredia es $v_H = (x_1 - x_0)/t_H = 10/20 = 0.5\,\text{km/min}$ ($\approx 30\,\text{km/h}$). b) Como el tren de Cartago tiene la misma rapidez, pero se desplaza en dirección contraria, $v_C = -0.5\,\text{km/min}$. c) La posición inicial del tren de Cartago es x_2, y su posición final es x_1. Entonces, $x_1 = x_2 + v_C t_C$, con lo que el tiempo que le toma es $t_C = (x_1 - x_2)/v_C = (10 - 35)/(-0.5) = 50\,\text{min}$. Esto significa que el tren de Cartago debe salir $30\,\text{min}$ antes que el tren de Heredia para que se encuentren a la misma hora en San José.

2.5 Marcos de referencia

En esta sección queremos enfatizar el hecho de que podemos elegir el origen y la dirección positiva para cualquier problema; siempre y cuando después seamos consistentes con nuestra elección inicial, la respuesta será equivalente.

Imagine que tres físicos y un ingeniero disparan un rayo láser muy potente desde la Tierra hasta la Luna. La luz se propaga en línea recta con una velocidad constante c; la distancia entre la Tierra y la Luna

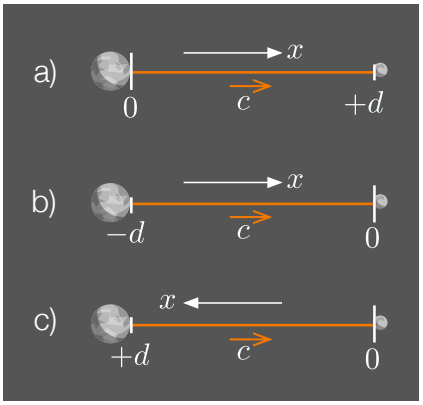


Figura 2.6: Rayo láser entre la Tierra y la Luna

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

es d. Queremos encontrar el tiempo que tarda el rayo en llegar a la Luna. Vamos a resolver el problema de tres formas equivalentes, que mostramos en la fig. 2.6.

En a), ponemos el origen en la Tierra y elegimos positivo hacia la Luna. En este caso, $x_0 = 0$, $x = +d$, y $v = +c$, por lo que $t = d/c$.

En b), ponemos el origen en la Luna y positivo hacia la derecha. En este caso, la posición inicial es $x_0 = -d$, la posición final $x = 0$, y la velocidad $v = +c$. Entonces, con la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme, $x = x_0 + vt \implies 0 = -d + ct \implies t = d/c$.

Por último, en c), mantenemos el origen en la Luna, pero ahora decidimos que es positivo hacia la izquierda. En consecuencia, la posición inicial es $x_0 = +d$, la posición final es $x = 0$, y la velocidad ahora es negativa, es decir, $v = -c$. Con esto, obtenemos $x = x_0 + vt \implies 0 = d - ct \implies t = d/c$.

Observe que en los tres casos, el tiempo nos dio positivo, como debe ser pues representa una *duración*. En cambio, si la pregunta hubiera sido la posición inicial, hubiéramos obtenido tres respuestas diferentes, pero todas serían equivalentes.

2.6 Aceleración media y simulaciones

En la fig. 2.7 se muestra un ciclista que parte desde el reposo (velocidad cero) hasta obtener una velocidad de $+5\,\mathrm{m/s}$ en un intervalo de $3\,\mathrm{s}$. Al cambio de velocidad se le llama **aceleración**, y definimos la **aceleración media** como

$$\bar{a} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.2}$$

En nuestro caso, la aceleración media de la bicicleta sería $\bar{a} = 5/3 \approx 1.7\,\mathrm{m/s^2}$. Como vemos, las unidades de la aceleración en el sistema internacional son $\mathrm{m/s^2}$. En un movimiento rectilíneo uniforme, la aceleración media es cero porque la velocidad no cambia.

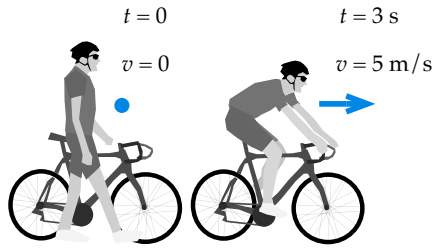


Figura 2.7: Aceleración media

Podemos utilizar la aceleración media para predecir de forma aproximada la posición de una partícula en el futuro. En una **simulación**, el movimiento de la partícula se calcula aproximándolo con pequeños movimientos rectilíneos uniformes, cada uno con velocidad diferente, calculada a partir de la aceleración media.

En la fig. 2.8 se muestra un esquema de cómo funciona una simulación, aplicada al movimiento de una caja unida a un resorte (fig. 2.8a), que estudiaremos con más detalle en el cap. 5. Veremos entonces que la aceleración de ese sistema es la función $a = -\omega^2 x$, donde ω es una constante y x es la posición de la caja. Lo que nos interesa por lo pronto es cómo con esa aceleración se puede calcular la velocidad, y con ella, la posición (es decir, cómo se mueve la caja). En la fig. 2.8b se muestran las ecuaciones utilizadas para calcular cada pequeño desplazamiento. Con la posición inicial x_1 se calcula la aceleración a_2. En la siguiente ecuación, calculamos la velocidad aproximada del trayecto, v_2 a partir de la aceleración media. Por último, esta velocidad se utiliza en la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme para calcular la posición x_2. El resultado de repetir este proceso muchas veces se muestra en la gráfica de la fig. 2.8c. En este caso, los puntos forman una función tipo seno o coseno.

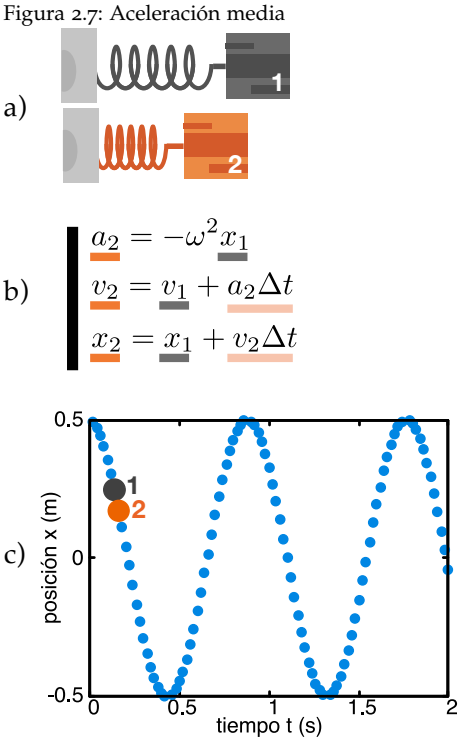


Figura 2.8: Esquema de funcionamiento de una simulación del movimiento de una caja unida a un resorte.

Las simulaciones son muy útiles e importantes porque permiten resolver problemas realistas (usualmente complicados) con aplicación en muchas áreas de ciencia y tecnología con relativa facilidad. Los cálculos

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

se hacen usualmente con ayuda de *software* de hoja de cálculo o programación. Es muy importante, sin embargo, señalar que el método solo sirve cuando Δt es pequeño; cuanto más pequeño, más exactos serán los resultados, aunque mayor la cantidad de cálculos.

Puntos clave

- Aceleración media: $\bar{a} = (v_1 - v_0)/(t_1 - t_0)$
- Simulación: aproximación del movimiento con desplazamientos pequeños. Con la aceleración se calcula la velocidad, y con la velocidad, se calcula la posición.

2.7 Movimiento con aceleración constante

Consideremos una partícula cuya aceleración es siempre constante. Siguiendo el procedimiento de la sección anterior, podemos hacer una simulación, cuyo resultado se muestra en la fig. 2.9. En este caso en particular, tanto la velocidad inicial como la posición inicial son cero. Como vemos, la gráfica de posición contra tiempo nos da una parábola, y los puntos coinciden con una función cuadrática. A continuación, vamos a examinar con más detalle este tipo de movimiento, y a calcular cuál función cuadrática es la que lo describe.

Primero, vamos a definir la **aceleración instantánea**, al igual que lo hicimos con la velocidad instantánea, como

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad \Delta t \text{ pequeño}$$

Si durante un tiempo t la aceleración de una partícula es constante, $a(t) = a = \text{const}$, entonces su aceleración media es igual a la instantánea siempre, y podemos despejar la velocidad como función del tiempo:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\implies v(t) = v_0 + at \tag{2.3}$$

Es decir, con la aceleración hemos encontrado la velocidad $v(t)$ para *todo* tiempo (y no solo para Δt pequeño).

Ahora, queremos encontrar la función $x(t)$ de la posición a partir de la velocidad. Para ello, vamos a utilizar un método gráfico. En la fig. 2.10 hemos graficado $v(t)$ para el caso en el que $v_0 = 0$. El resultado es una recta. En un tiempo pequeño Δt, el desplazamiento es $\Delta x = v\Delta t$, y corresponde aproximadamente a la pequeña área sombreada en la gráfica (base Δt por altura $v = at$). Por lo tanto, el desplazamiento total corresponde al área total bajo la curva, es decir, el área de un triángulo de base t y altura at:

$$x = \frac{at^2}{2}$$

es decir que *la posición es una función cuadrática del tiempo* (tiene la forma $f(t) = At^2 + Bt + C$) y, como vemos, su gráfica, una parábola, coincide con la simulación de la fig. 2.9. En general, si hay posición y velocidad iniciales, para un movimiento con aceleración constante,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2.4}$$

La gráfica x contra t de este movimiento es, como dijimos, una parábola, y la mostramos más esquemáticamente en la fig. 2.11. La aceleración es a, y es positiva en este caso. Como vemos, la intersección de la curva con el eje x nos indica la posición inicial, ya que al poner $t = 0$ en la ec. 2.4, $x(0) = x_0$. En ese momento, la velocidad de la partícula es $-v_0$, es decir, la velocidad inicial (negativa porque va hacia abajo). La

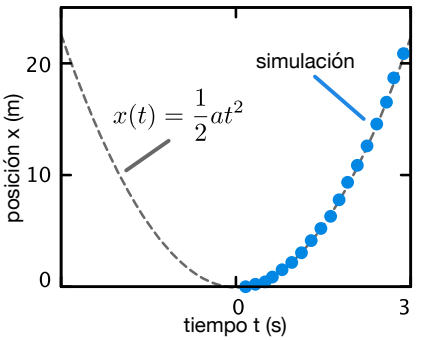


Figura 2.9: Simulación de un movimiento con aceleración constante

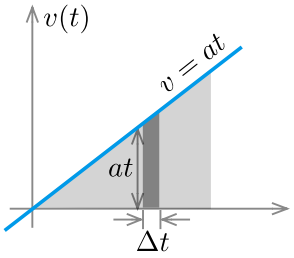


Figura 2.10: Gráfica de velocidad contra tiempo para el movimiento con aceleración constante.

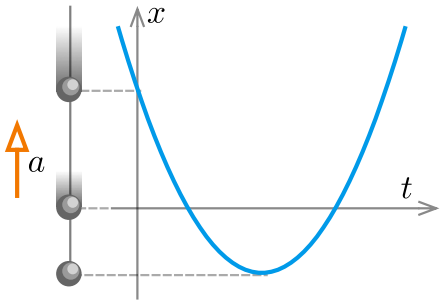


Figura 2.11: Gráfica de posición contra tiempo para el movimiento con aceleración constante.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

partícula va frenando por la acción de la aceleración. En el punto más bajo de la parábola, la partícula se ha detenido por completo, por lo que su velocidad instantánea es $v = 0$, y en nuestra gráfica la posición quedó del lado negativo del eje x. La parte derecha de la parábola muestra cómo la partícula se empieza a regresar hacia arriba.

Con solo las ecuaciones 2.4 y 2.3 ya podemos resolver cualquier problema de movimiento con aceleración constante. Sin embargo, hay una ecuación muy útil que también podemos derivar fácilmente. Despejamos el tiempo de la ec. 2.3,

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

y lo introducimos en la ec. 2.4,

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

factorizamos a y desarrollamos,

$$\implies a(x - x_0) = v_0 v - v_0^2 + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2}$$

ahora simplificamos

$$\implies a(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

$$\implies v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{2.5}$$

Esta ecuación es útil porque no tiene tiempo.

Puntos clave

- El área bajo la curva $v(t)$ es el desplazamiento

Movimiento con aceleración constante:

- Posición: **función cuadrática** del tiempo
- Ecuaciones:
  - $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
  - $v = v_0 + at$
  - $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

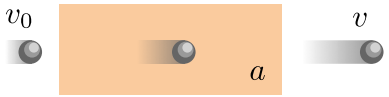


Figura 2.12: Acelerador de partículas

Ejemplo 2.6. *Acelerador de partículas.*

Un protón que viaja con una rapidez v_0 entra en un acelerador de partículas, donde hay una aceleración constante a, y mide una longitud L. Calcule la velocidad con la que el protón sale del acelerador.

Solución: Podemos aplicar la ec. 2.5 directamente:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$\implies v = \sqrt{v_0^2 + 2aL}$$

Figura 2.13: Frenado de un carro

Ejemplo 2.7. *Frenado de un carro.*

Un conductor distraído viaja con una velocidad de $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$, cuando se percata que el semáforo está en rojo. Si sus frenos solo lo pueden desacelerar $5\,\mathrm{m/s^2}$ y los aplica justo cuando está sobre el semáforo, a) ¿qué distancia recorre antes de frenar? b) ¿cuánto tiempo tarda en frenar?

Solución: Para averiguar la distancia de frenado, podemos decir que su posición inicial sea cero cuando aplica los frenos, y que la velocidad final es cero, puesto que se detiene por completo. Además, la aceleración es negativa puesto que va a la izquierda (derecha es

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

positivo). Entonces,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \implies 0 = v_0^2 + 2ax$$

$$\implies x = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{12^2}{2(-5)} = 14.4\,\text{m}$$

Por otro lado, el tiempo lo podemos encontrar de dos formas (ecs. 2.4 y 2.3). Vamos a elegir la ec. 2.3:

$$v = v_0 + at \implies t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-12}{-5} = 2.4\,\text{s}$$

Hay que tener en cuenta que muy probablemente el conductor provoque un accidente, pues la distancia de frenado es considerable.

Ejemplo 2.8. *Adelantamiento.*

En una carretera, un carro A se dispone a adelantar a un carro B que viaja con una velocidad constante de $v_B = 8\,\text{m/s} \approx 30\,\text{km/h}$. A se coloca en el carril del sentido contrario con la misma velocidad que B, como está en la fig. 2.14a. Ambos carros miden 3 m de largo. El adelantamiento dura $t = 2\,\text{s}$. a) ¿Cuál es la posición final de ambos carros? b) ¿cuál es la aceleración constante que debe tener A para adelantarlo?

Solución: El carro B se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, y el carro A tiene un movimiento con aceleración constante. Como en la fig. 2.14b, vemos que la posición inicial de A es cero ($x_{A0} = 0$), y que $x_{B0} = 3\,\text{m}$. La posición final de B llamémosla x_B, y la posición final de A es $x_B + 3$, puesto que cada carro mide 3 m de largo. Al cabo de $t = 2\,\text{s}$, el carro B se encuentra en

$$x_B = x_{B0} + v_B t = 3 + 8(2) = 19\,\text{m}$$

con esto, sabemos que la posición final del carro A debe ser $x_A = x_B + 3 = 22\,\text{m}$. Ahora, podemos aplicar la ecuación del movimiento con aceleración constante para A, $x_A = v_{A0}t + \frac{1}{2}at^2$, y despejamos la aceleración,

$$a = \frac{2}{t^2}(x_A - v_{A0}t) = 3\,\text{m/s}^2$$

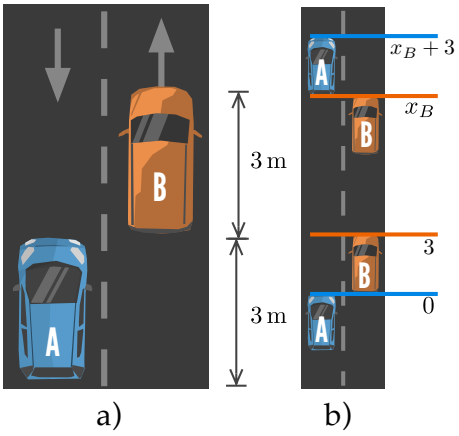


Figura 2.14: Adelantamiento

2.8 Caída libre

Los objetos que están cerca de la superficie terrestre están sujetos a una aceleración constante g hacia abajo llamada *aceleración de la gravedad*. Su valor promedio es de $g = 9.8\,\text{m/s}^2$, aunque varía ligeramente de lugar en lugar.

Observemos la fig. 2.15. Allí vemos una bola lanzada desde la orilla de una tabla (posición inicial y_0) hacia arriba. Elijamos que y positivo sea hacia arriba, con lo que la aceleración, que va hacia abajo, será negativa ($a = -g$). La bola primero disminuye su velocidad, hasta que llega a una altura máxima donde su velocidad es cero. Luego, empieza a ganar velocidad hacia abajo. Cuando pasa por el lugar desde donde la lanzaron, la bola lleva la misma velocidad v_0 pero hacia abajo. La bola

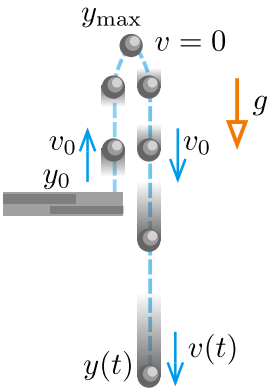


Figura 2.15: Caída libre

Punto clave
Caída libre cerca de la superf. terrestre: movimiento con aceleración constante $a = -g$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

seguirá aumentando su velocidad cada vez más. La posición de la bola en todo momento está dada por

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

donde hemos reemplazado $a = -g$ porque hacia abajo es negativo. La velocidad instantánea de la bola es

$$v(t) = v_0 - gt$$

y por supuesto, también se cumple la ecuación que no tiene tiempo,

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

Observemos que la caída libre no tiene nada que ver con la masa. Dos cuerpos de masas diferentes caen al mismo tiempo. En esta sección, sin embargo, no contemplamos los efectos del aire, que tiende a desacelerar la caída de los objetos entre mayor sea la superficie por unidad de masa en contacto con él. Es por esta razón que una hoja cae más lentamente que una piedra de la misma masa, aunque en ausencia del aire (vacío), ambas caerían de la misma manera.

Ejemplo 2.9. *Tiro vertical de una bola.*

Un futbolista patea una bola de forma vertical con una velocidad inicial de $v_0 = 8.0\,\text{m/s}$, con el objeto de cabecearla. Si todo el movimiento dura 1.38 s, a) ¿cuál es la altura del futbolista? b) ¿Cuál es la altura máxima (respecto al suelo) a la que se eleva la bola? c) ¿Con qué rapidez llegaría la bola a la cabeza del futbolista?

Solución: a) $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, con $y_0 = 0$ (suelo), $v_0 = 8.0$ y $t = 1.38$, entonces, $y = 1.7\,\text{m}$. b) La altura máxima se alcanza cuando $v = 0$. Podemos usar la ecuación que no tiene tiempo, con $v = 0$: $0 = v_0^2 - 2g y_{max} \implies y_{max} = 3.26\,\text{m}$. c) $v = v_0 - gt \implies v = -5.5\,\text{m/s}$, negativa porque es hacia abajo.

Ejemplo 2.10. *Caída de un coco.*

Un coco se suelta desde el reposo en lo alto de un cocotero, y cae en 2.0 s al suelo. a) ¿Cuál es la altura del cocotero? b) Si el viento le hubiera dado una velocidad inicial de 1.3 m/s hacia abajo, ¿en cuánto tiempo hubiera alcanzado el suelo el coco? c) En la situación original, cuando el coco llega a la arena, se detiene en 0.1 s. ¿Cuál es la aceleración media del coco al chocar contra la arena?

Solución: Elijamos $y_0 = 0$ y *positivo hacia abajo* ($+g$). a) Como se suelta del reposo, $v_0 = 0$ y $y = \frac{1}{2} g t^2 = 9.8(2.0)^2/2 = 19.6\,\text{m}$. b) $y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$, con lo que se forma la ecuación cuadrática $4.9t^2 + 1.3t - 19.6 = 0$, de la que salen las soluciones $t_1 = -2.1$ y $t_2 = 1.9$. Descartamos la segunda porque es anterior al momento en el que se suelta el coco. Entonces, $t = 1.9\,\text{s}$. c) $\bar{a} = (v_2 - v_1)/\Delta t$, donde $\Delta t = 0.1\,\text{s}$, $v_2 = 0$ y v_1 es la velocidad final del coco, que podemos calcular como $v_1 = gt = 19.6\,\text{m/s}$ lo que implica que $\bar{a} = -196\,\text{m/s}^2$.

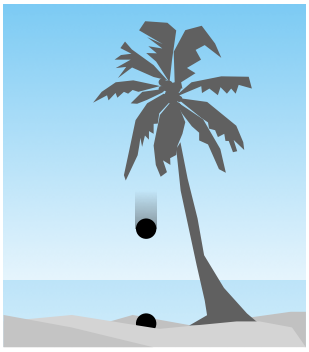


Figura 2.16: Caída de un coco

2.9 Movimiento relativo

Suponga que una persona P está subida en un tren T como en la fig. 2.17, mientras que una muchacha está parada en el suelo S.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Si la posición del tren respecto al suelo es x_{TS} y la posición de la persona respecto al tren es x_{PT} ¿Cuál es la posición de la persona respecto al suelo? Como se ve en la fig. 2.18, las posiciones se suman

$$x_{PS} = x_{PT} + x_{TS} \tag{2.6}$$

¿Cuál es la velocidad de la persona respecto al suelo? Si en la ecuación anterior, en lugar de posiciones tuviéramos desplazamientos y dividiendo entre el tiempo, tenemos que

$$v_{PS} = v_{PT} + v_{TS} \tag{2.7}$$

Tomemos algunos ejemplos concretos. Si usted estuviera en el suelo (S), el tren se moviera con una velocidad $v_{TS} = +3\,\mathrm{m/s}$ y viera a su amigo Pedro (P) caminar hacia atrás del tren (como en la fig. 2.17) con una velocidad $v_{PT} = -1\,\mathrm{m/s}$, entonces la velocidad de Pedro respecto al suelo sería $v_{PS} = 3 - 1 = +2\,\mathrm{m/s}$. Si Pedro corriera con la misma velocidad que el tren pero hacia atrás, entonces usted lo vería quedarse quieto desde el suelo. En cambio, si Pedro camina hacia adelante con una velocidad de $v_{PT} = +1\,\mathrm{m/s}$, entonces su velocidad respecto al suelo sería $v_{PS} = 3 + 1 = 4\,\mathrm{m/s}$.

En la fig. 2.19 se muestra una muchacha esperando por un taxi. Como puede observarse, la velocidad del taxi respecto a la muchacha es el negativo de la velocidad que tiene la muchacha respecto al taxi:

$$v_{TS} = -v_{ST}$$

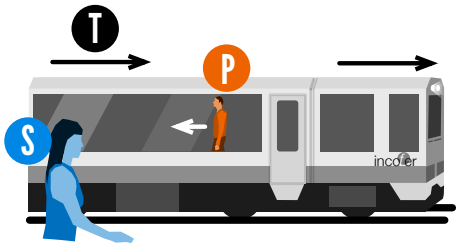


Figura 2.17: Movimiento relativo

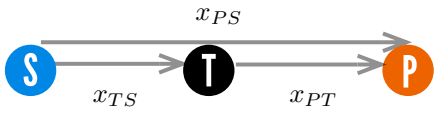


Figura 2.18: Posición en el movimiento relativo

Figura 2.19: Velocidades relativas

Ejemplo 2.11. *Adelantamiento.*

Las velocidades de los vehículos de la fig. 2.20 son $v_{AB} = 20\,\mathrm{km/h}$, $v_{BS} = 30\,\mathrm{km/h}$, $v_{CS} = -60\,\mathrm{km/h}$. Encontrar la velocidad de A respecto al suelo, y las velocidades relativas al carro A.

Solución: La velocidad de A respecto al suelo es $v_{AS} = v_{AB} + v_{BS} = 20 + 30 = 50\,\mathrm{km/h}$. La velocidad de B respecto a A es $v_{BA} = -v_{AB} = -20\,\mathrm{km/h}$ (desde el punto de vista de A, B va quedando hacia atrás).

La velocidad de C respecto a A se puede calcular con

$$v_{CA} = v_{CS} + v_{SA} = v_{CS} - v_{AS} = -60 - 50 = -110\,\mathrm{km/h}$$

El adelantamiento debe ocurrir suficientemente rápido para evitar una colisión.

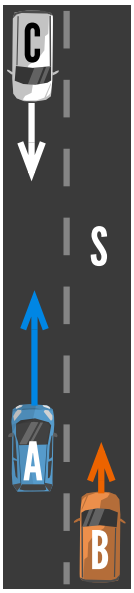


Figura 2.20: Adelantamiento

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

3 Vectores y cinemática bidimensional

3.1 Vectores y escalares

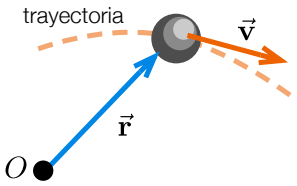


Figura 3.1: Vectores posición y velocidad de una partícula.

Un **vector** es un objeto matemático que lleva información de una medida de una cantidad física y una dirección asociada, y que cumple ciertas propiedades. Los vectores pueden representarse como flechas, cuyo largo representa la medida (llamada *magnitud*), y que apunta en su dirección.

Hay cantidades físicas que en general necesitan un vector para ser representadas correctamente en dos y tres dimensiones, puesto que llevan información de dirección. De las cantidades que hemos estudiado, la *posición*, *velocidad* y *aceleración* tienen una dirección asociada, por lo que en general son vectores. En cambio, la *masa* y el *tiempo* no tienen dirección asociada, por lo que no son vectores (se les llama **escalares**). Además, la *distancia* y la *rapidez* son escalares porque han perdido la dirección: solo pueden ser números positivos.

Los vectores se representan con una flecha encima de su símbolo. En la fig. 3.1 se muestra una partícula, su vector posición $\vec{\mathbf{r}}$ respecto a un punto O y su velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. La **trayectoria** es la curva que sigue la partícula.

3.2 Interpretación geométrica

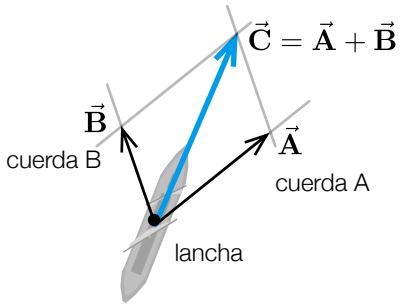


Figura 3.2: Suma geométrica

Para comparar vectores entre sí, primero vamos a definir una forma de *sumarlos*. Ya sabemos sumar y restar vectores que se encuentran en la misma recta, pues en el capítulo 2, sin darnos cuenta, usábamos vectores unidimensionales para la posición, velocidad y aceleración.

Para sumar vectores que van en direcciones distintas, podemos usar la situación de la fig. 3.2. Observamos una lancha que va siendo movida por dos cuerdas. La cuerda A tira de la lancha con una velocidad $\vec{\mathbf{A}}$, mientras que la cuerda B tira de la lancha con una velocidad $\vec{\mathbf{B}}$. Entonces, la lancha se mueve con una velocidad

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$$

Para encontrar el vector de forma geométrica, trazamos en la punta de $\vec{\mathbf{A}}$ una línea paralela a $\vec{\mathbf{B}}$. Ahora trazamos una paralela a $\vec{\mathbf{A}}$ que pase por la punta de $\vec{\mathbf{B}}$. Por último, el vector $\vec{\mathbf{C}}$ va desde el punto común de los vectores hasta donde se intersecan las líneas que trazamos. Los vectores solo se pueden sumar con otros vectores; no se pueden sumar vectores con escalares.

Resta y vector nulo

Todo vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene un vector $-\vec{\mathbf{A}}$ tal que al hacer la suma $-\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{A}}=\vec{\mathbf{0}}$. La flecha que representa al vector $-\vec{\mathbf{A}}$ apunta en dirección contraria a $\vec{\mathbf{A}}$, pero tiene su mismo tamaño (fig. 3.3). Al vector $\vec{\mathbf{0}}$ se le llama **vector nulo**.

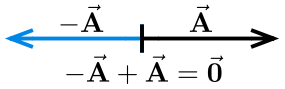


Figura 3.3: Negativos de un vector y vector nulo

La resta de dos vectores $\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}}$ se puede realizar como la suma $\vec{\mathbf{B}}+(-\vec{\mathbf{A}})$. También podemos visualizarlo como en la fig. 3.4: supongamos que el vector $\vec{\mathbf{A}}$ marca la posición de una persona respecto al origen. Ahora, la persona se desplaza, y su nueva posición es $\vec{\mathbf{B}}$. Entonces, el desplazamiento será la resta de las dos posiciones:

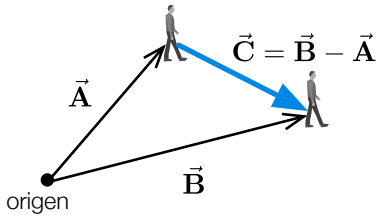


Figura 3.4: Resta geométrica

$$\vec{\mathbf{C}}=\vec{\mathbf{B}}-\vec{\mathbf{A}}$$

y lo encontramos con la regla "cabeza menos cola", es decir, la cabeza del vector resultante está en $\vec{\mathbf{B}}$, y la cola está en $\vec{\mathbf{A}}$.

Multiplicación por un escalar

Ya vimos qué ocurre cuando se multiplica un vector por -1. Ahora, veamos qué ocurre cuando se multiplica un vector por un número (escalar) cualquiera. Geométricamente, el vector cambiará su tamaño de acuerdo al número, como en la fig. 3.5. En ese ejemplo, el vector resultante tiene 2.5 veces el largo del vector original.

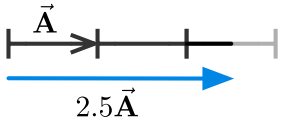


Figura 3.5: Producto de un vector por el escalar 2.5

Otras propiedades

Algunas otras propiedades matemáticas que definen los vectores son:

- La suma es conmutativa y asociativa: $\vec{\mathbf{A}}+(\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}})=\vec{\mathbf{B}}+(\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{C}})$
- El producto por escalar tiene ley distributiva: $n(\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{B}})=n\vec{\mathbf{A}}+n\vec{\mathbf{B}}$
- Al multiplicar un vector cualquiera por el escalar 0 obtenemos el vector nulo $\vec{\mathbf{0}}$

Puntos clave

- Los vectores tienen magnitud y dirección
- La posición, velocidad y aceleración son vectores
- Suma geométrica: se traza un paralelogramo
- Resta geométrica: "cabeza menos cola"
- Multiplicación por escalar: el vector cambia de tamaño

3.3 Descomposición en vectores componentes

Para comparar vectores es necesario "descomponerlos" en sumas de vectores que apunten en direcciones convencionales. Por ejemplo, sea el vector $\vec{\mathbf{A}}$ de la fig. 3.6 y dos rectas cualquiera, f y g (que no sean paralelas). Queremos descomponer el vector $\vec{\mathbf{A}}$ en una suma de dos vectores que apunten en las direcciones f y g. Para ello, vamos a trazar una recta paralela a f que pase por la punta de $\vec{\mathbf{A}}$, y una recta paralela a g que también pase por la punta de $\vec{\mathbf{A}}$. Los vectores componentes van desde el origen hasta donde estas rectas intersecan a los ejes f y g. Observamos en la figura que

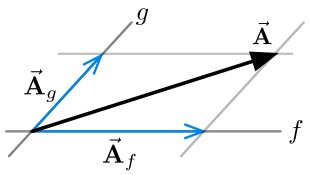


Figura 3.6: Descomposición en vectores componentes

$$\vec{\mathbf{A}}=\vec{\mathbf{A}}_f+\vec{\mathbf{A}}_g$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

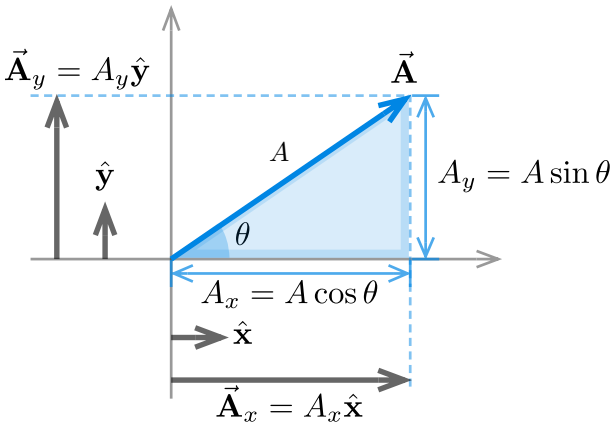


Figura 3.7: Descomposición de un vector en sus componentes cartesianas

3.4 Componentes cartesianas de un vector; vectores unitarios

Un **sistema de coordenadas** es un sistema de curvas que permite representar vectores numéricamente. El sistema de **coordenadas cartesianas** consta de rectas mutuamente perpendiculares, como en un papel cuadriculado. Vamos a descomponer un vector $\vec{\mathbf{A}}$ en sus vectores componentes cartesianos, $\vec{\mathbf{A}}_x$ y $\vec{\mathbf{A}}_y$.

En la fig. 3.7 se muestra la situación. Como vemos, las rectas x y y y sus paralelas son siempre perpendiculares, y forman junto con el vector, un triángulo rectángulo. La magnitud o largo del vector la representamos con A o $||\vec{\mathbf{A}}||$, y usando el teorema de Pitágoras, será:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Por otro lado, si el ángulo θ se mide desde el eje x (como está en la figura), podemos escribir $\cos\theta = A_x/A$, con lo que

$$A_x = A\cos\theta$$

asimismo, la componente en y, la podemos encontrar con $\sin\theta = A_y/A$:

$$A_y = A\sin\theta$$

Es más conveniente razonar siempre con trigonometría en lugar de aprenderse estas ecuaciones. Podemos definir los **vectores unitarios** $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$ como vectores cuya magnitud es 1 y que apuntan en las direcciones de los ejes x y y, de forma que los vectores componentes se puedan escribir como $\vec{\mathbf{A}}_x = A_x\,\hat{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{A}}_y = A_y\,\hat{\mathbf{y}}$ (recordemos la multiplicación de un vector por un escalar). Finalmente, el vector entonces se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}} \tag{3.1}$$

De ahora en adelante, vamos a escribir así los vectores. Casi no usaremos los vectores componentes, sino simplemente las componentes multiplicadas por los vectores unitarios.

Si tenemos las componentes del vector, también podemos encontrar el ángulo θ usando las funciones trigonométricas inversas, por ejemplo:

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \implies \theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Siempre hay que razonar la respuesta con trigonometría.

Puntos clave

- Todo vector se puede escribir como una suma de vectores en direcciones convencionales: $\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}}$
- Los vectores se descomponen en componentes cartesianas con trigonometría (seno o coseno)
- La magnitud de un vector se halla con el teorema de Pitágoras

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 3.1. *Despegue.*

Un avión despega con una rapidez (magnitud del vector velocidad) de 270 km/h, y una inclinación de 12° medida desde la horizontal (ver fig. 3.8). Calcule las componentes del vector velocidad y escríbalo como en la ec. 3.1.

Solución: Podemos simplemente usar la fig. 3.7 para ver que $v_x = v\cos\theta = 270\cos 12^\circ = 264\,\text{km/h}$, y $v_y = v\sin\theta = 270\sin 12^\circ = 56\,\text{km/h}$ con lo que $\vec{\mathbf{v}} = v_x\,\hat{\mathbf{x}} + v_y\,\hat{\mathbf{y}} = (264\,\text{km/h})\,\hat{\mathbf{x}} + (56\,\text{km/h})\,\hat{\mathbf{y}}$.

Figura 3.8: Despegue de un avión. [CC-BY 2012 Julian Herzog]

Ejemplo 3.2. *Descomposición de vectores.*

Descomponer en componentes cartesianas los vectores de la fig. 3.9, si $A = 5$, $B = 4$, $\theta = 25^\circ$ y $\phi = 35^\circ$.

Solución: Para el vector $\vec{\mathbf{A}}$, nos fijamos que sus componentes x y y serán negativas, por lo que vamos a escribir $\vec{\mathbf{A}} = -|A_x|\,\hat{\mathbf{x}} - |A_y|\,\hat{\mathbf{y}}$. Con la función coseno podemos ver que $|A_x| = A\cos\theta = 5\cos 25^\circ = 4.5$ (cateto adyacente), y con la función seno vemos que $|A_y| = A\sin\theta = 5\sin 25^\circ = 2.1$ (cateto opuesto). Entonces, $\vec{\mathbf{A}} = -4.5\,\hat{\mathbf{x}} - 2.1\,\hat{\mathbf{y}}$.

Para el vector $\vec{\mathbf{B}}$, las cosas cambian. Nos fijamos que la componente x es positiva, y la componente en y, negativa. Escribimos $\vec{\mathbf{B}} = +B_x\,\hat{\mathbf{x}} - |B_y|\,\hat{\mathbf{y}}$. Con la función seno (cateto *opuesto*) sacamos la componente en x: $B_x = B\sin\theta = 4\sin 35^\circ = 2.3$. Con la función coseno (cateto adyacente) sacamos la componente en y: $|B_y| = B\cos\theta = 4\cos 35^\circ = 3.3$. El vector queda $\vec{\mathbf{B}} = +2.3\,\hat{\mathbf{x}} - 3.3\,\hat{\mathbf{y}}$.

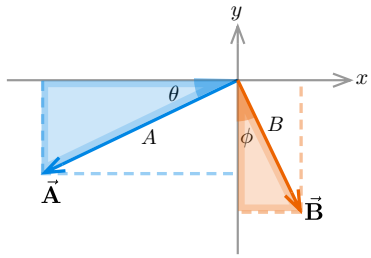


Figura 3.9: Descomposición de vectores

Ejemplo 3.3. *Magnitud y ángulo.*

Para los vectores $\vec{\mathbf{A}} = 2.5\,\hat{\mathbf{x}} + 1.8\,\hat{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\,\hat{\mathbf{x}} + 2\,\hat{\mathbf{y}}$, que se encuentran dibujados en la fig. 3.10, calcule la magnitud y los ángulos θ y ϕ.

Solución: Las magnitudes se encuentran con el teorema de Pitágoras: $A = \sqrt{(2.5)^2 + (1.8)^2} = 3.0$ y $B = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = 2.2$. Los ángulos los podemos encontrar de varias formas, por ejemplo, vemos que el cateto adyacente a ϕ es A_x, con lo que $\cos\phi = A_x/A \implies \phi = \arccos(2.5/3.0) \approx 34^\circ$. Por otro lado, $\sin\theta = B_x/B \implies \theta = \arcsin(1/2.2) \approx 27^\circ$.

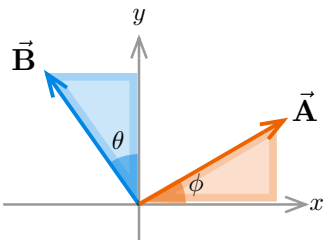


Figura 3.10: Magnitud y ángulo

3.5 Posición, velocidad y aceleración

Hemos dicho que la posición, la velocidad y la aceleración son vectores. También definimos el desplazamiento como la resta de dos posiciones:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0$$

La velocidad entonces se define como

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}, \quad \Delta t \text{ pequeño}$$

y la aceleración, como

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}, \quad \Delta t \text{ pequeño}$$

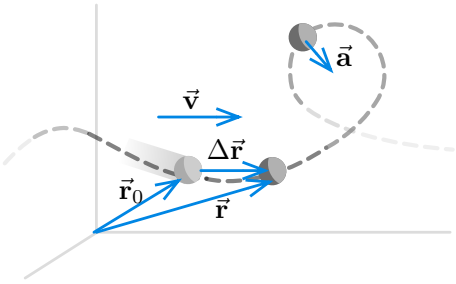


Figura 3.11: Posición, velocidad y aceleración como vectores

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

La distancia entre dos puntos será la magnitud del desplazamiento: $d = ||\Delta\vec{\mathbf{r}}||$. La rapidez es la magnitud de la velocidad: $v = ||\vec{\mathbf{v}}||$.

3.6 Suma y resta por componentes

Hemos visto la interpretación geométrica de la suma y resta de vectores, pero no cómo calcularla. Los vectores simplemente *se suman componente a componente*: si tenemos

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}}; \qquad \vec{\mathbf{B}} = B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}}$$

entonces la suma es

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y)\,\hat{\mathbf{y}}$$

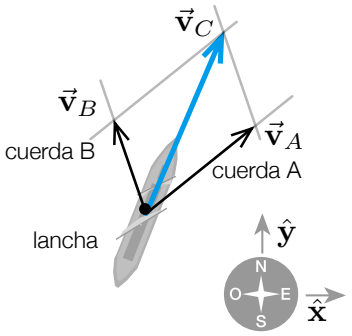


Figura 3.12: Movimiento rectilíneo uniforme en dos dimensiones

Ejemplo 3.4. *Lancha.*

Dos cuerdas tiran de una lancha, como se muestra en la fig. 3.12. Elegimos $\hat{\mathbf{x}}$ hacia el este y $\hat{\mathbf{y}}$ hacia el norte. Las velocidades de las cuerdas son $\vec{\mathbf{v}}_B = (-3.8\,\mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{x}} + (4.5\,\mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{v}}_A = (6.0\,\mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{x}} + (2.5\,\mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{y}}$, ambas constantes (en magnitud y dirección). Calcule: a) la velocidad del movimiento de la lancha y b) la distancia a la que se encontrará la lancha de su punto de inicio después de 1 min.

Solución: Como podemos ver, la combinación de dos movimientos rectilíneos uniformes da como resultado otro movimiento rectilíneo uniforme en la dirección de la suma de ambas velocidades. La velocidad del velero es

$$\vec{\mathbf{v}}_C = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{v}}_B = (2.2\,\mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{x}} + (7.0\,\mathrm{m/s})\,\hat{\mathbf{y}}$$

el desplazamiento después de de 60 s es

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}_C \Delta t = (132\,\mathrm{m})\,\hat{\mathbf{x}} + (420\,\mathrm{m})\,\hat{\mathbf{y}}$$

con lo que la distancia será

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx 440\,\mathrm{m}$$

Puntos clave

- Los vectores se suman y restan componente a componente.
- $\vec{\mathbf{v}} = \Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t$, Δt peq.
- $\vec{\mathbf{a}} = \Delta\vec{\mathbf{v}}/\Delta t$, Δt peq.

Ejemplo 3.5. *Suma y resta de vectores.*

Calcular $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$ en la fig. 3.9.

Solución: Ya hemos descompuesto los vectores en componentes, y con esto podemos sumar y restar componente a componente. El resultado fue $\vec{\mathbf{A}} = -4.5\,\hat{\mathbf{x}} - 2.1\,\hat{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 2.3\,\hat{\mathbf{x}} - 3.3\,\hat{\mathbf{y}}$. Entonces escribimos

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (-4.5 + 2.3)\,\hat{\mathbf{x}} + (-2.1 - 3.3)\,\hat{\mathbf{y}} = -2.2\,\hat{\mathbf{x}} - 5.4\,\hat{\mathbf{y}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}} = (2.3 - [-4.5])\,\hat{\mathbf{x}} + (-3.3 - [-2.1])\,\hat{\mathbf{y}} = 6.8\,\hat{\mathbf{x}} - 1.2\,\hat{\mathbf{y}}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 3.6. *Nube.*

Una nube se encuentra en la posición $\vec{\mathbf{r}}_0 = 3.0\,\hat{\mathbf{x}} + 2.4\,\hat{\mathbf{y}}$ medida en kilómetros desde una estación meteorológica ($\hat{\mathbf{y}}$ es hacia el Norte y $\hat{\mathbf{x}}$ es hacia el Este). 15 min = 0.25 h después, la nube se encuentra en $\vec{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} + 9.7\,\hat{\mathbf{y}}$. Calcule: a) El desplazamiento de la nube, b) la velocidad media de la nube (y por ende, del viento que la desplazó) c) su rapidez.

Solución: a) El desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ será la resta de ambas posiciones:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0 = (1 - 3.0)\,\hat{\mathbf{x}} + (9.7 - 2.4)\,\hat{\mathbf{y}} = -2\,\hat{\mathbf{x}} + 7.3\,\hat{\mathbf{y}}$$

b) La velocidad media se encuentra con

$$\bar{\vec{\mathbf{v}}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{-2\,\hat{\mathbf{x}} + 7.3\,\hat{\mathbf{y}}}{0.25} = (-8.0\,\text{km/h})\,\hat{\mathbf{x}} + (29.2\,\text{km/h})\,\hat{\mathbf{y}}$$

y la rapidez, como $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-8.0)^2 + (29.2)^2} = 30.3\,\text{km/h}$

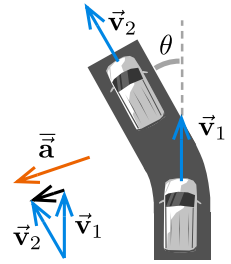


Figura 3.13: Curva

Ejemplo 3.7. *Curva.*

Un carro se mueve con $v = 6\,\text{m/s}$ cuando toma una curva de $\theta = 30°$ sin cambiar su rapidez (fig. 3.13). Calcule la aceleración media que experimenta el carro si tarda 2 s en la curva.

Solución: La aceleración es el cambio de velocidad en el tiempo. Aunque la rapidez del carro no cambia, la dirección de la velocidad cambia, por lo que tiene que existir una aceleración. Ponendo en el diagrama los ejes como de costumbre, $\vec{\mathbf{v}}_1 = v\,\hat{\mathbf{y}} = 6\,\hat{\mathbf{y}}$. Usamos el ángulo para descomponer el vector $\vec{\mathbf{v}}_2$:

$$\vec{\mathbf{v}}_2 = -v\sin\theta\,\hat{\mathbf{x}} + v\cos\theta\,\hat{\mathbf{y}} = -3\,\hat{\mathbf{x}} + 5.2\,\hat{\mathbf{y}}$$

con esto, $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1 = -3\,\hat{\mathbf{x}} + (5.2 - 6)\,\hat{\mathbf{y}} = -3\,\hat{\mathbf{x}} - 0.8\,\hat{\mathbf{y}}$. La aceleración media entonces será

$$\bar{\vec{\mathbf{a}}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{-3\,\hat{\mathbf{x}} - 0.8\,\hat{\mathbf{y}}}{2} = -1.5\,\hat{\mathbf{x}} - 0.4\,\hat{\mathbf{y}}$$

La aceleración media va hacia el "centro" de la curva.

3.7 Producto punto y producto cruz

Vectores tridimensionales

En general, en un espacio tridimensional, se necesitan 3 vectores unitarios para especificar completamente la dirección de un vector. Entonces, un vector $\vec{\mathbf{A}}$, en tres dimensiones, se escribe como

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}} + A_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

la magnitud de un vector tridimensional es $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

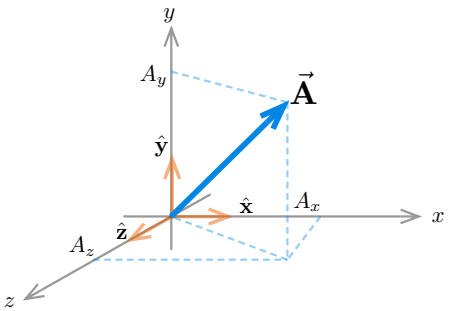


Figura 3.14: Vector $\vec{\mathbf{A}}$ en tres dimensiones.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Producto punto

Hemos visto cómo multiplicar un vector por un escalar, pero no cómo multiplicar dos vectores entre sí. *Los vectores tienen dos formas de multiplicarse: el producto punto y el producto cruz.* Además, *los vectores no pueden dividirse uno entre otro* (solo se pueden dividir vectores entre escalares).

El **producto punto** $(\cdot)$ toma dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y forma un escalar con ellos. Lo calculamos como

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta \tag{3.2}$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. Para ver el significado geométrico del producto punto, veamos la fig. 3.15, que muestra el producto punto de un vector $\vec{\mathbf{A}}$ con un vector unitario $\hat{\mathbf{x}}$. Como vemos en la figura, el producto punto da $A\cos\theta$, lo cual es como la *sombra* o *proyección* del vector $\vec{\mathbf{A}}$ en la dirección de $\hat{\mathbf{x}}$.

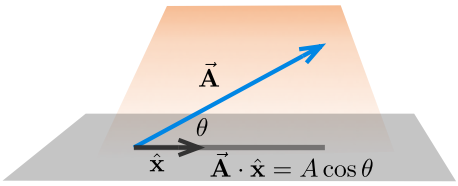


Figura 3.15: Producto punto con un vector unitario

Ejemplo 3.8. *Productos punto de varios vectores.*

En la fig. 3.16 tenemos que $A = 3$, $B = C = D = 2$ y $\theta = 50°$. Calcule: a) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$; b) $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$; c) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$; d) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{D}}$.

Solución: a) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta = 3 \cdot 2 \cdot \cos 50° = 3.9$. b) $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = BA\cos\theta = 2 \cdot 3 \cdot \cos 50° = 3.9$. Los dos resultados dan lo mismo: el producto punto es conmutativo. c) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}} = AC\cos 90° = 0$. d) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{D}} = AD\cos 180° = 3 \cdot 2\cos 180° = -6$.

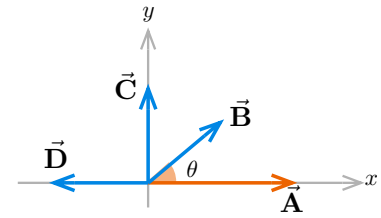


Figura 3.16: Producto punto de varios vectores

Producto cruz

El **producto cruz** $(\times)$ toma dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y da como resultado otro vector, $\vec{\mathbf{C}}$, que es mutuamente perpendicular a $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Para dos vectores como en la fig. 3.17, la magnitud del producto cruz se calcula como

$$||\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|| = AB|\sin\theta| \tag{3.3}$$

y la dirección se calcula con la llamada **regla de la mano derecha** (fig. 3.18a): ponemos los dedos orientados con $\vec{\mathbf{A}}$, y luego cerramos la mano hacia donde está $\vec{\mathbf{B}}$. El dedo pulgar apuntará a la dirección de $\vec{\mathbf{C}}$, el producto cruz. Por lo tanto, volviendo a la fig. 3.17, el producto cruz sería entonces en la dirección $+\hat{\mathbf{z}}$:

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = AB|\sin\theta|\,\hat{\mathbf{z}} \tag{3.4}$$

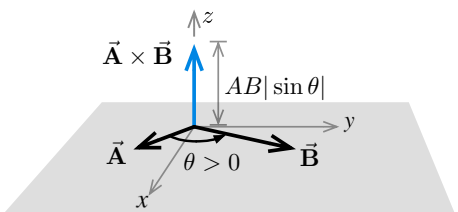


Figura 3.17: Producto cruz

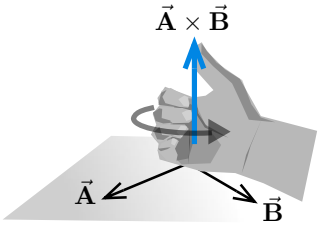


Figura 3.18: Regla de la mano derecha

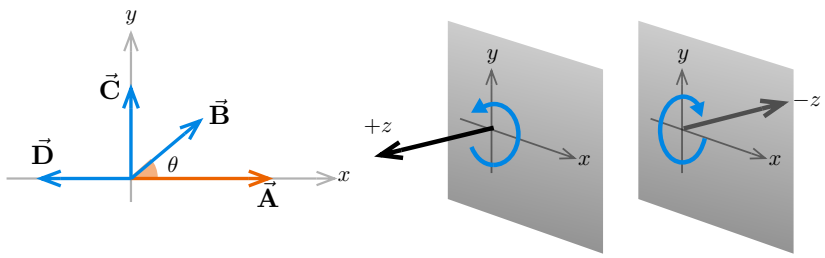


Figura 3.19: Producto cruz de varios vectores y el resultado de la aplicación de la regla de la mano derecha en el plano xy.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 3.9. *Productos cruz de varios vectores.*

En la fig. 3.19 tenemos varios vectores. Sea $A = 3$, $B = C = D = 2$ y $\theta = 50°$. Calcule los productos cruz: a) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$; b) $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$; c) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$; d) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{D}}$.

Solución: Calculamos:

$$\text{a) } \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (3)(2)\sin 50°(+\hat{\mathbf{z}}) = 4.6\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{b) } \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (2)(3)\sin 50°(-\hat{\mathbf{z}}) = -4.6\,\hat{\mathbf{z}}$$

Debido a la regla de la mano derecha, el producto cruz no es conmutativo; el orden en el que se hace sí importa.

$$\text{c) } \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}} = (3)(2)\sin 90°(+\hat{\mathbf{z}}) = 6\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{d) } \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{D}} = (3)(2)\sin 180°(\,\hat{\mathbf{z}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

Puntos clave

- $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta$
- $||\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|| = AB|\sin\theta|$ (dir. con regla de la mano derecha)

Los sistemas de coordenadas tridimensionales siempre deben dibujarse de forma que $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = +\hat{\mathbf{z}}$. Vamos a usar el producto punto y producto cruz más adelante.

3.8 Tiro de proyectiles

Imaginemos que soltamos una bola con velocidad inicial cero desde la orilla de una mesa, como se dibuja en la fig. 3.20. Lo que ocurre es una caída libre, como la que estudiamos en la §2.8. Ahora, si en lugar de soltar la bola primero hacemos que ruede sobre la mesa, vamos a tener una velocidad inicial en x, pero no en y. Entonces, se combina un movimiento rectilíneo uniforme en x y caída libre en y. A este tipo de movimiento se le llama **tiro de proyectiles**, y tiene una forma parabólica. Las ecuaciones del movimiento de proyectiles son, por lo tanto:

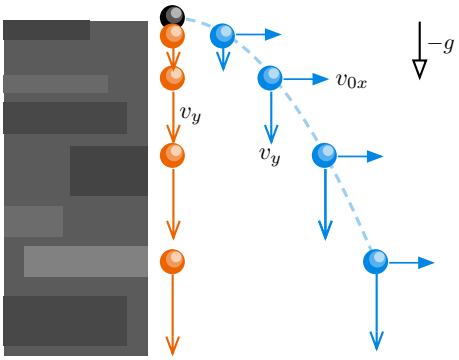


Figura 3.20: Caída libre (izq., anaranjado) y tiro de proyectiles (der., azul)

$$x = x_0 + v_x t \tag{3.5}$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{3.6}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.7}$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \tag{3.8}$$

Todas estas ecuaciones se tienen que cumplir simultáneamente. De la fig. 3.20 podemos observar que ambas bolas llegan al suelo al mismo tiempo. La posición como vector sería

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}$$

donde x se calcula con la ec. 3.5 y y con las ec. 3.6 o 3.8. La velocidad como vector sería

$$\vec{\mathbf{v}} = v_x\,\hat{\mathbf{x}} + v_y\,\hat{\mathbf{y}}$$

donde la componente en x es constante en el tiempo, y la componente en y se calcula con las ec. 3.7 o 3.8.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 3.10. *Bola que cae por la orilla de la mesa.*

Una bola rueda a 2.0 m/s por una mesa, cuando llega a la orilla cae como en la fig. 3.20. Si la mesa tiene 1 m de alto, calcule: a) el tiempo que tardó en caer, b) la posición final de la bola respecto a la orilla de la mesa al chocar con el piso, c) la velocidad que tenía justo antes de chocar contra el piso.

Solución: Vamos a poner el marco de referencia en la orilla de la mesa, y elegimos y positivo hacia arriba y x positivo hacia la derecha. La velocidad inicial es $\vec{\mathbf{v}}_0 = 2.0\,\text{m/s}\,\hat{\mathbf{x}}$. a) Podemos usar la ec. 3.6 con $y_0 = 0$, $y = -1$, $v_{0y} = 0$ para encontrar el tiempo: $y = -\frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{-2y/g} = \sqrt{-2(-1)/9.8} = 0.45\,\text{s}$. b) La posición final en y es $y_1 = -1$. La posición final en x la podemos calcular con la ec. 3.5 usando el tiempo de caída y la velocidad inicial en x: $x_1 = 2.0 \times 0.45 = 0.9$. Entonces el vector posición final es $\vec{\mathbf{r}} = 0.9\,\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}$. c) La velocidad final en y podemos encontrarla con la ec. 3.7: $v_{y1} = -gt = -4.4\,\text{m/s}$, con lo que la velocidad final queda $\vec{\mathbf{v}} = (2.0\,\text{m/s})\,\hat{\mathbf{x}} - (4.4\,\text{m/s})\,\hat{\mathbf{y}}$.

Puntos clave

- Caída libre en y, mov. rectilíneo uniforme en x.
- La trayectoria es una parábola
- $x = x_0 + v_x t$ (3.5)
- $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ (3.6)
- $v_y = v_{0y} - gt$ (3.7)
- $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$ (3.8)

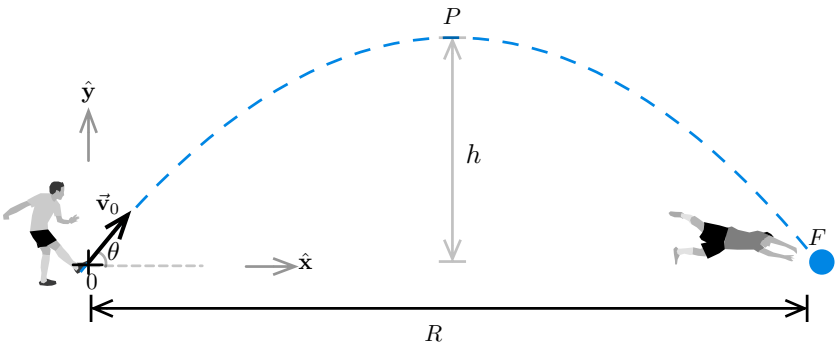


Figura 3.21: Tiro libre

Ejemplo 3.11. *Tiro libre.*

Un jugador de fútbol patea la bola con una rapidez inicial de $v_0 = 10\,\text{m/s}$ en un ángulo de $\theta = 45°$, como se muestra en la fig. 3.21. Calcule: a) la altura máxima h a la que llega la bola; b) la distancia horizontal R donde llega la bola.

Solución: En la figura se ha puesto el marco de referencia. Descomponemos $\vec{\mathbf{v}}_0$ en sus componentes: $\vec{\mathbf{v}}_0 = v_0\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + v_0\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}} = 7.1\,\hat{\mathbf{x}} + 7.1\,\hat{\mathbf{y}}$. a) La altura máxima se alcanza cuando $v_y = 0$. Podemos usar la ec. 3.8 para encontrarla:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \implies v_{0y}^2 = 2gh \implies h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 2.6\,\text{m}$$

b) Por otro lado, para encontrar R primero tenemos que encontrar el tiempo total de vuelo de la bola, porque queremos usar la ec. 3.5 pero no tenemos el tiempo. Para encontrarlo, podemos aplicar la ec. 3.6 con las posiciones inicial y final, $y_0 = 0$ y $y = 0$:

$$0 = 0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \implies t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

lo que tiene soluciones $t = 0$ o $t = 2v_{0y}/g = 1.4\,\text{s}$ (tomamos la segunda porque la primera indica el inicio del movimiento). Ahora que ya tenemos el tiempo, podemos encontrar R con la ec. 3.5:

$$R = 0 + v_x t = 7.1 \times 1.4 = 9.9\,\text{m}$$

Ejemplo 3.12. *Bola que pega contra la pared.*

Un futbolista patea una bola con una rapidez inicial $v_0 = 10\,\text{m/s}$ y un ángulo $\alpha = 60°$ (ver fig. 3.22). La bola pega contra una pared a una distancia $D = 6\,\text{m}$. Calcule la altura a la que la bola pega contra la pared.

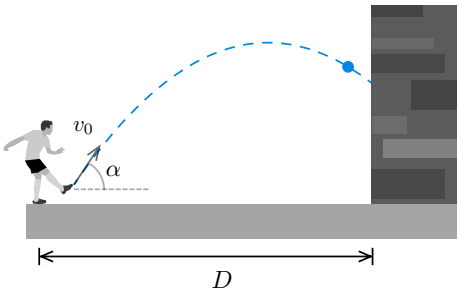


Figura 3.22: Bola que pega contra la pared

Solución: Vamos a ubicar el marco de referencia como en el problema anterior. Además, la velocidad inicial es $\vec{\mathbf{v}}_0 = v_0 \cos\alpha\,\hat{\mathbf{x}} + v_0 \sin\alpha\,\hat{\mathbf{y}} = 5\,\hat{\mathbf{x}} + 8.7\,\hat{\mathbf{y}}$. Para averiguar la posición final en y, primero tenemos que encontrar el tiempo, pues queremos usar la ec. 3.6 pero no tenemos el tiempo. Sin embargo, podemos usar la ec. 3.5 para encontrarlo:

$$D = v_0 \cos\alpha\, t \implies t = \frac{D}{v_0 \cos\alpha} = 1.2\,\text{s}$$

Ahora que tenemos el tiempo, podemos sustituirlo en la ec. 3.6:

$$h = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 3.3\,\text{m}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

4 Dinámica: fuerzas

4.1 Fuerza y leyes de Newton

Hasta el momento, hemos hecho únicamente una descripción del movimiento, sin considerar sus causas. En mecánica clásica, para describir las interacciones entre las partículas y su entorno, utilizamos el concepto de **fuerza**. Podemos pensar en una fuerza como un empujón o tirón en una dirección determinada. En este capítulo estudiaremos varios ejemplos de fuerzas, y cómo causan el movimiento o reposo de los cuerpos. En 1687, Isaac Newton propuso tres leyes o principios con los que se puede calcular el movimiento o reposo de los cuerpos a partir de las fuerzas que actúan sobre ellos.

4.2 Primera ley de Newton

La primera ley de Newton dice:

> Un cuerpo sin fuerzas se mueve en línea recta con velocidad constante (en un marco de referencia inercial).

Un objeto que no esté sujeto a la acción de ninguna fuerza, es decir, un cuerpo *libre*, permanece en reposo relativo (velocidad cero respecto a algo) o en movimiento rectilíneo uniforme, indefinidamente (fig. 4.1a). Una bola de fútbol, por ejemplo, permanecería en movimiento rectilíneo uniforme para siempre si no existiera la *fuerza de fricción* contra la cancha que la va deteniendo. Tradicionalmente a esta ley se la conoce como *ley de la inercia*, y no se cumple en todos los marcos de referencia. Los marcos de referencia donde sí se cumple la primera ley de Newton se llaman **marcos de referencia inerciales**. En el interior de un bus que frena, por ejemplo, (fig. 4.1b), los pasajeros experimentan un "empujón" hacia adelante, aunque nadie parece empujarlos: el interior de un bus que frena no es un marco de referencia inercial. Lo que se hace en estas situaciones es analizar la situación desde un marco de referencia que sí es inercial: para propósitos prácticos el suelo es un marco de referencia inercial. Lo que ocurre en la fig. 4.1b, visto desde el suelo, es que el bus reduce su velocidad debido a los frenos mientras que los pasajeros mantienen la velocidad original, por lo que se desplazan hacia adelante respecto al bus. Hay que tener en cuenta que el problema surge porque el bus está frenando; al moverse con velocidad constante sí es un marco de referencia inercial, como los dos veleros de la fig. 4.1c, que navegan a velocidad constante en un día tranquilo. Ambos se observan mutuamente sin fuerzas y permaneciendo en su viaje con velocidad constante.

La primera ley de Newton nos permite decir si se puede aplicar la segunda y la tercera: solo en marcos de referencia inerciales se pueden aplicar las demás leyes de Newton.

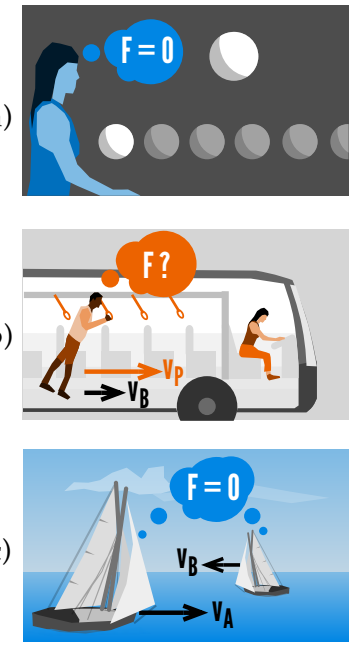


Figura 4.1: Primera ley de Newton y marcos de referencia inerciales

4.3 Segunda ley de Newton

Para partículas de masa constante, la segunda ley de Newton dice que

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = m\vec{\mathbf{a}} \tag{4.1}$$

es decir, que la fuerza neta (suma vectorial de las fuerzas) que actúa sobre una partícula es igual a su masa multiplicada por la aceleración. (El subíndice i representa cada fuerza; $i = 1, 2, 3...$). La segunda ley de Newton nos permite calcular cómo se mueve una partícula bajo la acción de fuerzas, puesto que, según lo vimos en la §2.6, a partir de la aceleración podemos encontrar la posición de una partícula en todo tiempo.

En notación de componentes, podemos decir que

$$\sum_i (F_{i,x}\,\hat{\mathbf{x}} + F_{i,y}\,\hat{\mathbf{y}}) = m(a_x\,\hat{\mathbf{x}} + a_y\,\hat{\mathbf{y}})$$

es decir,

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = ma_x \\ \sum_i F_{iy} = ma_y \end{cases}$$

Las unidades de la fuerza en el sistema internacional son los Newton (N) y equivalen a $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$.

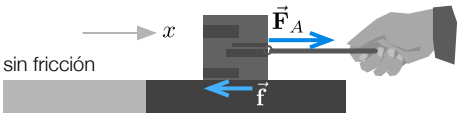


Figura 4.2: Caja siendo arrastrada por dos superficies

Ejemplo 4.1. *Caja siendo arrastrada en dos superficies.*

Una persona tira de una caja de 2 kg con una fuerza constante de $F_A = 8\,\mathrm{N}$ en una superficie sin fricción (fig. 4.2). En un cierto momento, pasa por un piso donde hay una fricción constante de $f = -3\,\mathrm{N}$. Calcule la aceleración de la caja a) en la superficie sin fricción y b) en el piso con fricción.

Solución: a) $\sum F_x = F_A = ma \implies a = F_A/m = 8/2 = 4\,\mathrm{m/s^2}$. b) La fuerza neta será $F_A + f = ma \implies a = (F_A + f)/m = (8-3)/2 = 2.5\,\mathrm{N}$.

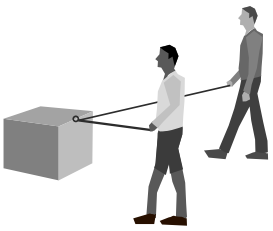
Ejemplo 4.2. *Carro que acelera.*

Un carro de $m = 1200\,\mathrm{kg}$ viaja a $v_0 = 30\,\mathrm{km/h} \approx 8.3\,\mathrm{m/s}$ y acelera a $v_1 = 80\,\mathrm{km/h} = 22.2\,\mathrm{m/s}$ en $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$. Calcule la fuerza neta media necesaria.

Solución: La aceleración media es $\bar{a} = (v_1 - v_0)/\Delta t = 2.78\,\mathrm{m/s^2}$. Según la segunda ley de Newton, $\sum F = m\bar{a} = 3\,336\,\mathrm{m/s^2}$.

Ejemplo 4.3. *Fuerzas en dos dimensiones.*

Una caja de 3 kg es arrastrada por dos trabajadores, con fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_A$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$. Sabemos que $\vec{\mathbf{F}}_A = (14\,\hat{\mathbf{x}} + 5.6\,\hat{\mathbf{y}})\,\mathrm{N}$, y que la aceleración de la caja solo tiene componente en x, $a_x = 5\,\mathrm{m/s^2}$. Calcule la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_B$.



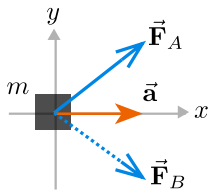


Figura 4.3: Fuerzas en dos dimensiones

Solución: Hacemos un esquema como el de la fig. 4.3. Aplicamos por separado la segunda ley de Newton en las componentes x y y:

$$\sum_i F_{ix} = ma_x \implies F_{Ax} + F_{Bx} = ma_x$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

$$\implies F_{Bx} = 3 \times 5 - 14 = 1\,\text{N}$$

ahora, en y, recordando que $a_y = 0$,

$$\sum_i F_{iy} = 0 \implies F_{Ay} + F_{By} = 0$$

$$\implies F_{By} = -5.6\,\text{N}$$

con lo que la fuerza queda $\vec{\mathbf{F}}_B = (\,\hat{\mathbf{x}} - 5.6\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{N}$

4.4 Tercera ley de Newton

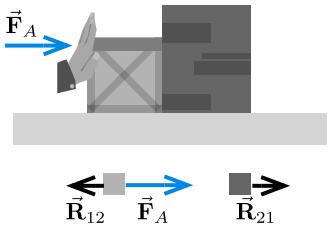


Figura 4.4: Fuerza de reacción horizontal

Hasta ahora hemos considerado fuerzas que actúan sobre partículas aisladas. Cuando tenemos dos partículas interactuando entre sí, conviene escribir las fuerzas así: consideremos dos partículas, 1 y 2. La fuerza que sobre 1 hace 2 se denota como $\vec{\mathbf{F}}_{12}$, y la fuerza que sobre 2 hace 1 se denota como $\vec{\mathbf{F}}_{21}$.

La tercera ley de Newton dice:

> Cuando una partícula ejerce una fuerza sobre otra, la segunda partícula reacciona ejerciendo también una fuerza igual en magnitud y en dirección opuesta a la primera.

En la fig. 4.4 tenemos dos cajas a las cuales se les aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$. Por lo pronto solo vamos a considerar la dirección horizontal (la vertical se estudiará en la siguiente sección). Primero que nada, no hemos dicho qué hacer con la segunda ley de Newton si tenemos más de una partícula. Lo que debemos hacer es *aplicar la segunda ley en cada partícula por separado*. No se pueden mezclar fuerzas aplicadas en partículas distintas.

Ahora, regresando a la fig. 4.4, observemos que las cajas 1 y 2 están en contacto, por lo que se producen dos fuerzas de reacción, $\vec{\mathbf{R}}_{12}$ y $\vec{\mathbf{R}}_{21}$, y ambas van en direcciones contrarias. La suma de fuerzas en la caja 1 es:

$$F - R_{12} = m_1 a_1$$

y la suma de fuerzas en la caja 2 es

$$R_{21} = m_2 a_2$$

Observemos que la aceleración de las cajas es la misma, pues se mueven juntas en todo momento, por lo que $a_1 = a_2 = a$. Con esto, nuestras ecuaciones quedan

$$\begin{cases} F - R_{12} = m_1 a \\ R_{21} = m_2 a \end{cases} \tag{4.2}$$

Ahora nos hacemos la siguiente pregunta: ¿qué pasaría si en lugar de tener dos cajas tuviéramos solo una con la masa combinada $m_1 + m_2$? Bueno, en ese caso no tendríamos fuerzas de reacción, pues solo habría una partícula, y la segunda ley de Newton quedaría $F = (m_1 + m_2)a$. ¿Es este resultado diferente al de las ec. 4.2? Para averiguarlo, utilizamos la tercera ley de Newton $R_{21} = R_{12}$ (los signos ya están metidos en la ecuación) y obtenemos

$$F - m_2 a = m_1 a \implies F = (m_1 + m_2)a \tag{4.3}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

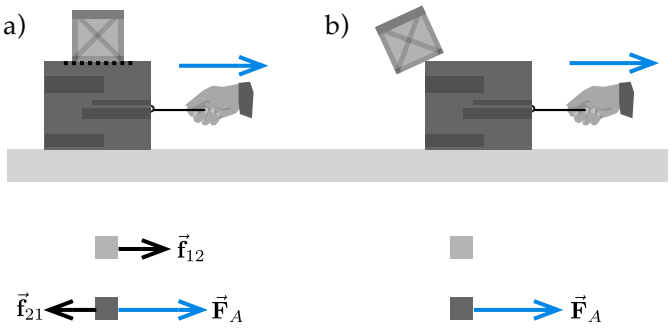


Figura 4.5: Tercera ley de Newton

que era lo mismo que obtendríamos si consideramos ambas cajas como un todo.

Ahora consideremos la situación de la fig. 4.5, donde las cajas se encuentran una sobre otra. Observe que las fuerzas de reacción deben ser ahora *fricción estática*, es decir, algo que "una" a ambas cajas (fig. 4.5a). Si no existiera esta fricción, como en la fig. 4.5b, la caja 2 sencillamente se deslizaría y caería, puesto que, por la primera ley, no tendría fuerzas y por ende permanecería en reposo respecto al suelo. Esto es lo que le pasa a los pasajeros de un autobús cuando este arranca.

Ejemplo 4.4. *Reacción de dos cajas.*

En la fig. 4.4, suponga que $F_{Ax} = 10\,\text{N}$, $m_1 = 2\,\text{kg}$, $m_2 = 6\,\text{kg}$. Calcule la aceleración del sistema y las fuerzas de reacción.

Solución: De la ec. 4.3, podemos despejar a:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 1.25\,\text{m/s}^2$$

Ahora que tenemos la aceleración, podemos usar cualquiera de las ec. 4.2 para encontrar la fuerza de reacción:

$$R_{21} = R_{12} = m_2 a = 7.5\,\text{N}$$

Ejemplo 4.5. *Arranque de un autobús.*

Un autobús arranca con una aceleración de $5\,\text{m/s}^2$. Para no caerse, un pasajero de 70 kg que viaja de pie se agarra de una de las barras metálicas del bus. ¿Cuál es la fuerza que hace la barra para que el pasajero no se caiga?

Solución: Hemos discutido en la §4.2 que no es posible tratar el problema (con las herramientas de este capítulo) desde dentro del autobús. En su lugar, consideramos la situación de la fig. 4.5a (visto desde el suelo), donde en lugar de la fricción, tenemos la reacción entre el pasajero y la barra. La suma de fuerzas en el pasajero y el bus nos quedará idéntica a las ec. 4.2. Usando la segunda de esas ecuaciones, obtenemos que $R_{21} = m_2 a = 70 \times 5 = 350\,\text{N}$.

Puntos claves

- Primera ley de Newton: un cuerpo sin fuerzas se mantiene en reposo o movimiento rectilíneo uniforme.
- Marco de referencia inercial: aquel donde se cumple la primera ley de Newton.
- Solo en m. ref. inerciales se pueden aplicar las demás leyes de Newton.
- Segunda ley de Newton: $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ (partículas de masa constante)
- Tercera ley de Newton: cuando una partícula ejerce una fuerza sobre otra, la segunda ejerce una fuerza de reacción.
- Varias partículas: se aplica la segunda ley por separado en cada una.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

4.5 Gravedad y fuerza normal

Cerca de la superficie del planeta, existe una **fuerza de gravedad**, que empuja los cuerpos hacia el centro del planeta, y se calcula como

$$\text{fuerza de gravedad} = m\vec{\mathbf{g}}$$

donde, para la Tierra, $\vec{\mathbf{g}} = -g\,\hat{\mathbf{y}} = -9.8\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{\mathbf{y}}$ (negativo si definimos positivo hacia arriba).

Para un cuerpo que solo esté bajo la acción de la gravedad (fig. 4.6a), la segunda ley de Newton nos dará que $-mg = ma_y$, por lo que $a_y = -g$, y tendremos caída libre (§2.8).

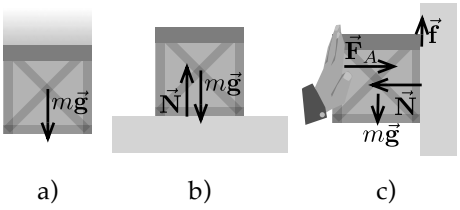


Figura 4.6: a) Gravedad y caída libre. b y c) Fuerza normal

Ejemplo 4.6. *Gravedad en distintos planetas.*

Calcule la fuerza de gravedad de una persona de 70 kg cerca de la superficie de la Tierra, la Luna y Marte, sabiendo que $g_{\text{Tierra}} = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, $g_{\text{Luna}} = 1.6\,\mathrm{m/s^2}$, $g_{\text{Marte}} = 3.9\,\mathrm{m/s^2}$.

Solución: $mg_{\text{Tierra}} = 686\,\mathrm{N}$; $mg_{\text{Luna}} = 113\,\mathrm{N}$; $mg_{\text{Marte}} = 275\,\mathrm{N}$.

Figura 4.7: Báscula [CC-BY 2009 Flickr:Ludovic Bertron]

La fuerza de reacción de una superficie, que contrarresta la gravedad u otras fuerzas aplicadas hacia esta, se llama **fuerza normal**. (La palabra *normal* se usa aquí con el significado de *perpendicular*). La fuerza normal es, entonces, siempre perpendicular a la superficie en cuestión.

Si un cuerpo se apoya contra una superficie horizontal sin ninguna otra fuerza vertical, la normal es igual a la fuerza de gravedad (fig. 4.6b); para encontrar la normal, en general hay que hacer un análisis de fuerzas. Las básculas en realidad miden la normal. Así, si dejamos caer una caja con una báscula por debajo, mientras cae, la báscula marcará cero (no hay normal). Las básculas, además, están calibradas para mostrar kilogramos, utilizando la aceleración de la gravedad de la Tierra como referencia.

Ejemplo 4.7. *Normal.*

a) Una caja de $m = 8\,\mathrm{kg}$ se apoya sobre una mesa. Calcule la fuerza normal. b) La misma caja se apoya contra una pared, y se le aplica una fuerza de 40 N hacia la pared. Calcule la fuerza normal y la fricción necesaria para detener la caída de la caja.

Solución: a) Aplicamos el diagrama de la fig. 4.6b, para ver que la normal solo tiene componente vertical: $N - mg = 0 \implies N = mg = 8 \times 9.8 = 78.4\,\mathrm{N}$. b) Siguiendo la fig. 4.6c, se ve que la normal va hacia la izquierda y debe ser $F_A - N = 0 \implies N = F_A = 40\,\mathrm{N}$. (No hay que confundir el símbolo N para la normal con el símbolo para los newtons, N). Por otro lado, del diagrama vemos que todo lo que detiene la caída de la caja es la fricción, por lo que esta debe ser igual a la gravedad: $f - mg = 0 \implies f = mg = 78.4\,\mathrm{N}$.

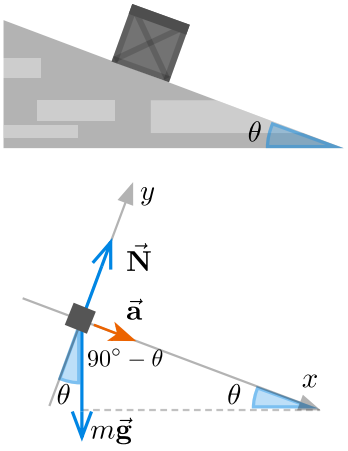


Figura 4.8: Plano inclinado

Ejemplo 4.8. *Plano inclinado.*

Una caja de masa m se desliza sin fricción por un plano inclinado con un ángulo θ como el de la fig. 4.8. Calcule la fuerza normal que ejerce el plano y la aceleración de la caja.

Solución: Podemos elegir el diagrama de fuerzas de muchas formas, pero en este caso vamos a elegirlo inclinado, de forma que la acelera-

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

ción solo tenga componente en x. Podríamos haberlo elegido también de la forma usual (arriba y, derecha x). Observe que según nuestro diagrama, hay que descomponer la gravedad de la caja en dos componentes, mg_x y mg_y. Para ello usamos el ángulo θ:

$$mg_x = mg\sin\theta; \qquad mg_y = -mg\cos\theta$$

Ahora hacemos suma de fuerzas en y:

$$\sum F_y = 0 \implies N - mg\cos\theta = 0$$

con lo que nos queda que la normal es $N = mg\cos\theta$. Ahora debemos encontrar la aceleración de la caja. Para ello hacemos la suma de fuerzas en x:

$$\sum F_x = ma \implies mg\sin\theta = ma \implies a = g\sin\theta$$

Puntos claves

- Gravedad cerca de la superf. terrestre: mg
- Normal: reacción de una superficie (siempre perpendicular a ella)
- Fricción estática: $f_s \leq \mu_s N$
- Fricción cinética: $f_k = \mu_k N$

4.6 Fricción

Hasta el momento, hemos hablado de la fricción como una fuerza que dificulta o impide el movimiento, pero no sobre cómo encontrarla. Existen dos tipos de fricción: estática y cinética. La *fricción estática* ocurre si el punto de contacto entre el cuerpo y la superficie no se mueve. En la *fricción cinética*, el punto de contacto sí se mueve. La fricción es causada por las pequeñas imperfecciones que existen entre las superficies.

La **fricción estática** se encuentra con un análisis de fuerzas, y contrarresta las fuerzas que intentan mover el cuerpo de forma paralela a la superficie. De forma aproximada, la magnitud de la fricción estática se puede encontrar con

$$f \leq \mu_s N \tag{4.4}$$

donde μ_s se llama *coeficiente de fricción estática*, y depende de las superficies en contacto, y N es la magnitud de la normal a la superficie. El signo de menor o igual significa que la fricción es igual a la fuerza aplicada si esta es menor que $\mu_s N$, y tiene un valor máximo igual a $\mu_s N$ (μ no tiene unidades). Si se aplica una fuerza mayor a ese valor, el cuerpo comienza a moverse, y entonces entra en juego la **fricción cinética**, cuyo valor es aproximadamente constante e igual a

$$f = \mu_k N$$

donde μ_k es el *coeficiente de fricción cinética* e igual que el caso anterior, depende de las superficies en contacto.

Ejemplo 4.9. *Empujar o tirar de una caja.*

¿Qué requiere menos fuerza: empujar o tirar de una caja en un ángulo? En la fig. 4.9 se encuentran ambas situaciones. Suponga que $\theta = 30°$, $m = 10\,\text{kg}$, $\mu = 0.5$, y que queremos la mínima fuerza, es decir, queremos que la caja se mueva con velocidad constante.

Solución: a) Primero, analicemos el caso en el que se tira de la caja (fig. 4.9a). La suma de fuerzas en x nos da

$$\sum F_x = 0 \implies -\mu N + F_A\cos\theta = 0$$

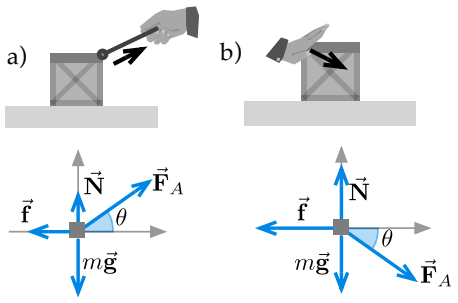


Figura 4.9: Empujar o tirar de una caja

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Y la suma de fuerzas en y:

$$\sum F_y = 0 \implies N + F_A \sin\theta - mg = 0$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, N y F_A. Podemos escribir el sistema de forma numérica como

$$\begin{cases} -0.5N + 0.87F_A = 0 \\ N + 0.5F_A - 98 = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $N \approx 76\,\text{N}$; $F_A \approx 44\,\text{N}$.

b) Ahora vamos a hacer lo mismo con el caso en el que se empuja la caja. La suma de fuerzas da

$$\begin{cases} -\mu N + F_A \cos\theta = 0 \\ N - F_A \sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

sustituyendo los valores numéricos,

$$\begin{cases} -0.5N + 0.87F_A = 0 \\ N - 0.5F_A - 98 = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $N \approx 138\,\text{N}$, $F_A \approx 79\,\text{N}$. Como puede verse, se requiere más fuerza para empujar que para tirar de la caja con el mismo ángulo. La razón es que al empujar la caja se aumenta la normal, pues se presiona contra el suelo, y por consiguiente, se aumenta la fricción.

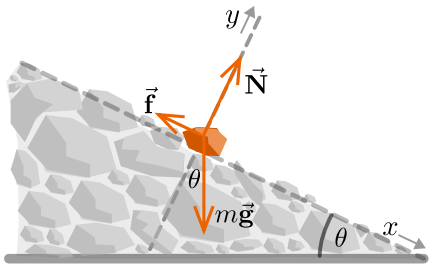


Figura 4.10: Talud

Ejemplo 4.10. *Talud.*

Una piedra se coloca en una rampa hecha con otras piedras, con las que tiene un coeficiente de fricción estática μ_s. ¿Cuál es el máximo ángulo θ que puede tener la rampa sin que la piedra se deslice?

Solución: Siguiendo el dibujo, hacemos una suma de fuerzas en x y y, igualando a cero puesto que queremos que la piedra permanezca en equilibrio:

$$\sum F_y = 0 \implies N - mg\cos\theta \implies N = mg\cos\theta$$

$$\sum F_x = 0 \implies -\mu_s N + mg\sin\theta = 0$$

sustituyendo N en la suma de fuerzas en x,

$$-\mu_s mg\cos\theta + mg\sin\theta = 0$$

$$\mu_s \cos\theta = \sin\theta \implies \mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

con lo que el ángulo se calcula como $\theta = \arctan(\mu_s)$. A este ángulo se le conoce como *ángulo de reposo*, y es el máximo ángulo que puede haber en un talud para que este sea estable.

En un volcán, por ejemplo, el cono naturalmente forma el ángulo de reposo con la horizontal. El coeficiente de fricción depende del tipo de material lanzado. En los volcanes del tipo *estratovolcanes*, como el volcán Arenal, por ejemplo, el material es muy viscoso y por ello la

Figura 4.11: Volcán Arenal [PD]

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

pendiente es pronunciada (de la fig. 4.11 podemos estimar $\theta \approx 32°$, con lo que $\mu_s = \tan\theta = 0.62$).

4.7 Cuerdas y poleas

Puntos claves

- Cuerda ideal: tiene tensión pero no cambia de tamaño
- Polea ideal: solo cambia la dirección de la tensión

Cuando una cuerda está estirada, experimenta una **fuerza de tensión** que, vista desde cualquier punto en la cuerda, va *hacia afuera* (tiende a estirarla). Una cuerda ideal, sin embargo, nunca cambia su tamaño. Las cuerdas no pueden tener tensiones hacia adentro (una tensión cero implica que la cuerda está floja).

Las **poleas ideales** sirven solamente para cambiar la dirección de la fuerza de tensión.

Ejemplo 4.11. *Cuerdas en una grúa.*

Una grúa sostiene una caja con dos cuerdas como se encuentra en la fig. 4.12. Si la masa de la caja es m y el ángulo de la cuerda 1 con la horizontal es θ, calcule las dos tensiones.

Solución: Hacemos un diagrama de fuerzas y hacemos la sumatoria de fuerzas:

$$\begin{cases} \sum F_x : \; T_1 \cos\theta - T_2 = 0 \\ \sum F_y : \; T_1 \sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

de la segunda de estas ecuaciones vemos que $T_1 = mg/\sin\theta$. Al sustituir este resultado en la primera ecuación obtenemos

$$T_2 = \frac{mg}{\sin\theta}\cos\theta = mg\cot\theta$$

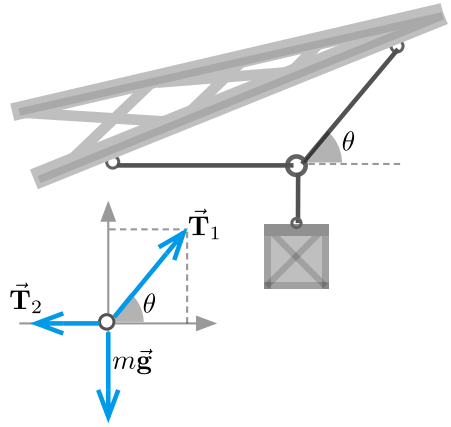


Figura 4.12: Cuerdas en una grúa

Ejemplo 4.12. *Máquina de Atwood.*

Dos cajas se encuentran unidas por una cuerda que pasa por una polea (fig. 4.13). La caja 1 tiene una masa de $m_1 = 2\,\text{kg}$, y la caja 2, $m_2 = 4\,\text{kg}$. Calcule: a) la tensión en la cuerda y b) la aceleración del sistema.

Solución: Vamos a elegir positivo hacia arriba para ambas cajas. Hay que hacer una suma de fuerzas en ambas cajas. Ahora, vamos a argumentar lo siguiente:

- Como la polea solo cambia la dirección de la fuerza, las tensiones son iguales: $\vec{\mathbf{T}}_1 = \vec{\mathbf{T}}_2 = \vec{\mathbf{T}}$.
- Como la cuerda no cambia de longitud, la magnitud de la aceleración de ambas cajas debe ser la misma, a. Según nuestros marcos de referencia, $\vec{\mathbf{a}}_1 = a\,\hat{\mathbf{y}}$, y $\vec{\mathbf{a}}_2 = -a\,\hat{\mathbf{y}}$.

Ahora podemos hacer suma de fuerzas en y para cada caja:

$$\begin{cases} \text{caja 1} : \; T - m_1 g = m_1 a \\ \text{caja 2} : \; T - m_2 g = -m_2 a \end{cases}$$

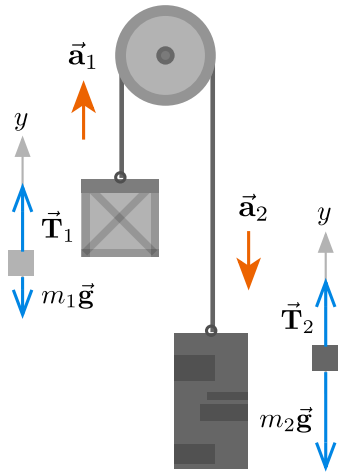


Figura 4.13: Máquina de Atwood

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

sustituyendo los valores numéricos,

$$\begin{cases} T - 19.6 = 2a \\ T - 39.2 = -4a \end{cases}$$

que tiene como solución $T \approx 26\,\text{N}$; $a \approx 3.27\,\text{m/s}^2$.

Ejemplo 4.13. *Caja sostenida por dos cuerdas.*

Una caja de masa m está sostenida por dos cuerdas como se muestra en la fig. 4.14. Ambas cuerdas hacen un mismo ángulo θ con el techo. a) Demuestre que las tensiones de ambas cuerdas son la misma. b) Encuentre la tensión de la cuerda en términos de las variables dadas.

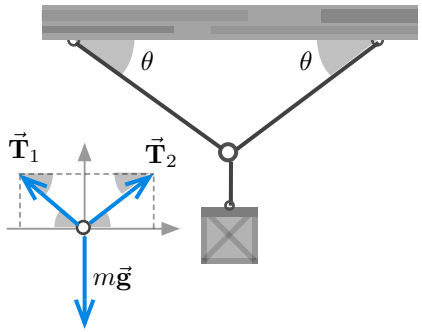


Figura 4.14: Caja sostenida por dos cuerdas.

Solución: Primero hacemos una suma de fuerzas en x:

$$-T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta = 0 \implies T_1 = T_2$$

Como la tensión es la misma, vamos a llamarla simplemente T. Ahora hacemos suma de fuerzas en y:

$$2T \sin\theta - mg = 0 \implies T = \frac{mg}{2\sin\theta}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

5 Movimiento circular, gravitación y oscilaciones

5.1 Movimiento circular uniforme

En la §3.6 vimos cómo un cuerpo que cambia su velocidad, aunque no cambie su rapidez, necesita una aceleración. Imaginemos un tubo de ensayo en cuyo interior hemos puesto una bola, como en la fig. 5.1. Si ponemos a rotar el tubo de ensayo, la bola adquiere una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1$. De acuerdo con las leyes de Newton, la bola sigue su movimiento con esa velocidad constante hasta que se topa con las paredes del tubo de ensayo, las cuales hacen una fuerza normal hacia adentro, y curva la trayectoria de la bola. En general, a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_c$ hacia adentro que curva la trayectoria de una partícula se le llama **fuerza centrípeta**. Diferentes fuerzas pueden *actuar* como fuerzas centrípetas; en nuestro ejemplo, la normal actúa como fuerza centrípeta.

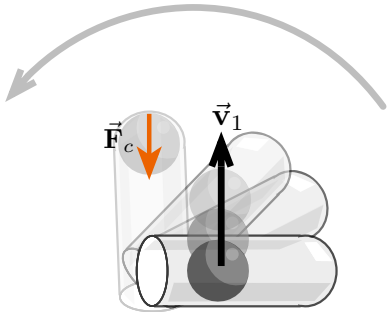


Figura 5.1: Bola en un tubo de ensayo que gira. Imagine que todo se encuentra en una mesa visto desde arriba, es decir, no hay gravedad.

Observemos que para una hormiga que se encontrara dentro del tubo de ensayo, la bola se mueve de forma repentina hacia el fondo, sin razón aparente: el interior de un tubo de ensayo es un marco de referencia *no inercial* (§4.2): no podemos aplicar en ese marco las leyes de Newton como las vimos en el cap. 4. Comúnmente se le llama *"fuerza" centrífuga* al empujón aparente de la bola visto desde el interior del tubo de ensayo.

Supongamos ahora que una persona gira una piedra atada a una cuerda de masa despreciable, en una superficie horizontal, como en la fig. 5.2. La fuerza centrípeta siempre va *radialmente hacia adentro*, y la velocidad siempre es *tangente* a la trayectoria circular de la partícula.

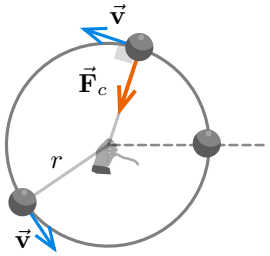


Figura 5.2: Velocidad, fuerza centrípeta y vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$

Ahora queremos saber cuánta fuerza centrípeta se necesita para mantener en movimiento circular de radio r a una partícula de masa m, la cual viaja con rapidez v. Primero, vamos a escribir la fuerza centrípeta como $F_c = ma_c$, utilizando la segunda ley de Newton. A a_c se le llama **aceleración centrípeta**, y la podemos encontrar con los diagramas de la fig. 5.3: observemos que entre dos momentos del movimiento circular, 1 y 2, se forman dos triángulos: uno con las posiciones y el desplazamiento (fig. 5.3a) y otro con las velocidades y su resta (fig. 5.3b). Observe que ambos triángulos son isósceles y comparten el mismo ángulo (en la fig. 5.3b, la magnitud de $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ es la misma, v). Entonces, podemos utilizar proporciones:

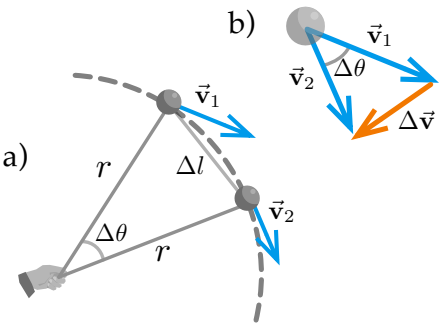


Figura 5.3: Aceleración centrípeta. Note cómo $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ apunta radialmente hacia adentro.

$$\frac{\Delta l}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

Ahora, la magnitud de la aceleración centrípeta la podemos encontrar como

$$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta l}{\Delta t}; \qquad \Delta t \text{ peq.}$$

Observe que como Δt debe ser pequeño, Δl debe parecerse mucho al arco de la circunferencia (fig. 5.3a), por lo que podemos aproximar $\Delta l/\Delta t \approx v$, con lo que tendríamos

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{5.1}$$

A la hora de hacer una suma de fuerzas, hay que recordar que la aceleración centrípeta va radialmente hacia adentro, y asignarle la dirección correcta en nuestro diagrama de fuerzas.

Al tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta se le llama se le llama *periodo* T. Definimos la *frecuencia* como

$$f = \frac{1}{T} \tag{5.2}$$

y representa el número de vueltas por segundo. La unidad de la frecuencia se llama *hertz* (símbolo: Hz), y equivale a $1\,\mathrm{s}^{-1}$. Definimos la *velocidad angular* ω como

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{5.3}$$

La *longitud de arco* Δs recorrida por la partícula en un ángulo $\Delta\theta$ se encuentra como

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

Si dividimos esa ecuación entre Δt (pequeño), obtenemos que

$$v = r\omega \tag{5.4}$$

que es la relación entre la velocidad tangencial y la angular.

Puntos clave

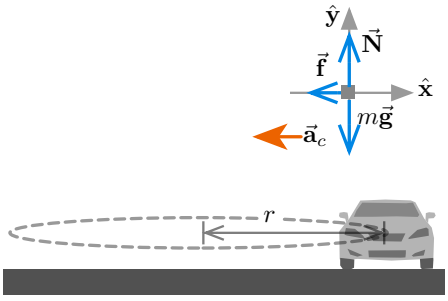
- Fuerza centrípeta: necesaria para mantener movimiento circular (si no, el cuerpo saldría por la tangente)
- $F_c = ma_c$
- Aceleración centrípeta: $a_c = v^2/r$
- Velocidad angular: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
- Velocidad tangencial: $v = \omega r$

Ejemplo 5.1. *Centrifugadora.*

Las "centrifugadoras" se utilizan para secar ropa o para separar componentes de una sustancia química, de la misma manera que la bola de la fig. 5.1 termina acumulándose en el fondo del tubo de ensayo. Una lavadora de 40 cm de radio seca una prenda de 2 kg haciéndola girar a 20 vueltas por segundo. a) ¿Cuál es el período? b) ¿Cuál es la velocidad tangencial? c) ¿Cuál es la fuerza F_N que deben ejercer las paredes de la lavadora?

Solución: a) Como la frecuencia es $f = 20\,\mathrm{Hz} \implies T = 1/20 = 0.05\,\mathrm{s}$. b) La velocidad angular es $\omega = 2\pi f = 126\,\mathrm{rad/s}$ $(= \mathrm{Hz})$. La velocidad tangencial es, por lo tanto, $v = \omega r = 50\,\mathrm{m/s}$. c) Aplicando la segunda ley de Newton, eligiendo positivo como radialmente hacia adentro, tenemos

$$F_N = m\frac{v^2}{r} \implies F_N = 2 \times \frac{50^2}{0.4} = 12500\,\mathrm{N}$$



Ejemplo 5.2. *Rapidez máxima de un carro en una curva.*

Un carro de 1000 kg toma una curva de 10 m de radio en una carretera horizontal. Si el coeficiente de fricción máximo con la carretera es de $\mu = 0.4$, calcule la rapidez máxima a la que puede ir el carro sin derrapar, es decir, sin salirse de la carretera.

Solución: En la fig. 5.4 se ilustra la situación. Como puede verse del

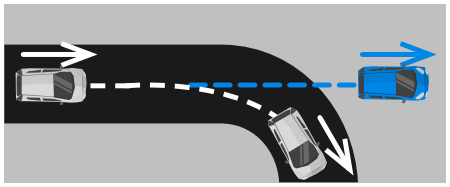


Figura 5.4: Rapidez máxima de un carro en una curva.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

diagrama de fuerzas, la fricción actúa como fuerza centrípeta, pues es la única fuerza horizontal. Si la fricción no existiera o fuera insuficiente, como puede ocurrir en un día lluvioso, el carro continuará con su velocidad tangencial y derrapará. La rapidez máxima se puede calcular en la situación en la que la fricción es máxima, es decir, cuando $f = \mu N$. Hacemos suma de fuerzas en dirección y:

$$N - mg = 0 \implies N = mg = 9800\,\text{N}$$

Ahora, la suma de fuerzas en x (con a_c negativa porque radialmente hacia adentro corresponde a la dirección $-x$ en nuestro diagrama):

$$-f = -m\frac{v^2}{r} \implies \mu N = m\frac{v^2}{r} \implies v = \sqrt{\frac{r\mu N}{m}}$$

lo que da $v = 6.26\,\text{m/s} \approx 23\,\text{km/h}$. Si el carro toma la curva con mayor rapidez, derrapará.

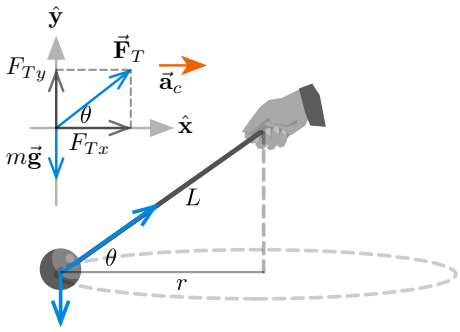


Figura 5.5: Péndulo cónico

Ejemplo 5.3. *Péndulo cónico.*

En la fig. 5.5 se muestra un *péndulo cónico*, que consiste en una piedra de masa $m = 3\,\text{kg}$ amarrada a una cuerda de largo $L = 1.2\,\text{m}$ que gira, considerando la presencia de la gravedad. La cuerda hace un ángulo $\theta = 30°$ con la horizontal. Calcule: a) la tensión de la cuerda; b) el radio del movimiento circular; c) la rapidez de la piedra.

Solución: a) Podemos calcular la tensión de la cuerda con una suma de fuerzas en y:

$$F_T \sin\theta - mg = 0 \implies F_T = \frac{mg}{\sin\theta} = 58.8\,\text{N}$$

b) Observemos que se hace un triángulo rectángulo con hipotenusa L, ángulo θ y cateto adyacente r. Podemos encontrar r con trigonometría:

$$r = L\cos\theta = 1.04\,\text{m}$$

c) Por último, la rapidez de la piedra podemos calcularla con la suma de fuerzas en x (con a_c positivo porque en nuestro diagrama va en dirección $+x$):

$$F_T \cos\theta = m\frac{v^2}{r} \implies v = \sqrt{\frac{rF_T\cos\theta}{m}}$$

sustituyendo los resultados de las partes (a) y (b), tenemos $v = 4.2\,\text{m/s}$.

5.2 Gravitación

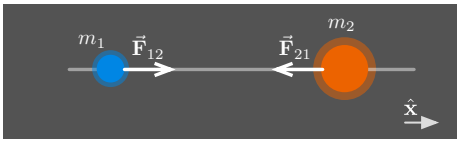


Figura 5.6: Gravitación entre dos estrellas

Ahora examinaremos con más detalle la gravedad. En realidad, todos los cuerpos se atraen unos a otros, por el simple hecho de tener masa. No obstante, como veremos, la fuerza es significativa solamente para cuerpos masivos como planetas, estrellas y satélites. Isaac Newton formuló la ley de **gravitación universal**, que proporciona la magnitud

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

de la fuerza de atracción mutua entre las partículas (fig. 5.6):

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{5.5}$$

donde r es la distancia entre las partículas, y $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ es la *constante de gravitación universal*, y se ha medido experimentalmente. La dirección de la fuerza es *en la línea que une ambas partículas, hacia adentro*. Para darnos una idea de lo débil que es la fuerza gravitacional para objetos de escala humana, dos masas de 1 kg cada una, separadas por 1 m de distancia, se atraen con una fuerza de magnitud $F = G \cdot 1^2/1^2 = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}$, la cual es demasiado pequeña como para ser percibida de forma cotidiana.

Ahora supongamos que queremos saber la fuerza gravitacional entre la Tierra y una caja cerca de la misma. La ley de gravitación universal está definida solamente para partículas, y cerca de la Tierra, esta no puede considerarse como partícula. No obstante, si consideramos a la Tierra como una esfera perfecta, debido a la simetría de esta, y a que desde lejos la fuerza debe ser como la de una partícula, podemos sustituirla por una partícula de igual masa pero ubicada en su centro. (Esto solo es válido si consideramos que la Tierra es una esfera perfecta cuya masa está distribuida uniformemente, y solo para puntos exteriores a su superficie).

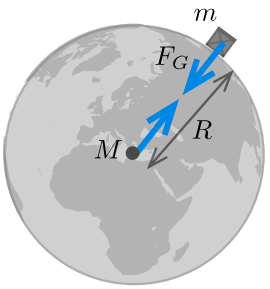


Figura 5.7: Fuerza entre la Tierra y una caja.

Ejemplo 5.4. *Estrellas.*

Calcule la fuerza (vector) gravitacional para las dos estrellas de la fig. 5.6, si una de ellas tiene el triple de la masa m de la otra, y están separadas por una distancia $2r$.

Solución: Llamemos F_G a la *magnitud* de la fuerza gravitacional. Sea 1 la estrella de masa m y 2 la de $3m$. Elegimos x positivo hacia la derecha, como está en la figura. Ahora, la fuerza que la estrella 1 siente debido la estrella 2 será $\vec{\mathbf{F}}_{12} = +F_G\,\hat{\mathbf{x}}$. Por tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -F_G\,\hat{\mathbf{x}}$. Entonces, aplicando la ec. 5.5,

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = +G\frac{3m \cdot m}{(2r)^2}\,\hat{\mathbf{x}} = -G\frac{3m^2}{4r^2}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = -G\frac{3m^2}{4r^2}\,\hat{\mathbf{x}}$$

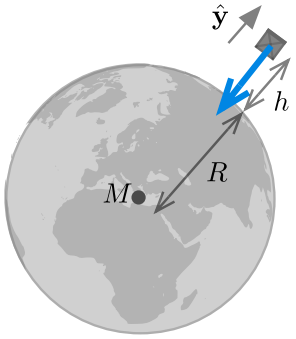


Figura 5.8: Caja a cierta distancia de la superficie terrestre.

5.3 Campo gravitacional y órbitas circulares

Un **campo** es alguna cantidad física que tiene un valor para cada punto del espacio, y que se utiliza para describir los efectos que produce un cuerpo a su alrededor.

Supongamos que dejamos caer una caja bajo la influencia de la gravedad de la Tierra, como está en la fig. 5.8. Entonces, según nuestro marco de referencia, la caja siente una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = -GMm/(R+h)^2\,\hat{\mathbf{y}}$, donde R es el radio de la Tierra, M su masa, h la altura y m la masa de la caja. Entonces, la aceleración que sufre la caja la podemos encontrar con la

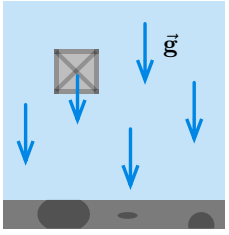


Figura 5.9: Campo gravitacional cerca de la superficie terrestre

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

segunda ley de Newton

$$m\vec{\mathbf{a}} = -G\frac{Mm}{(R+h)^2}\,\hat{\mathbf{y}} \implies \vec{\mathbf{a}} = \frac{-GM}{(R+h)^2}\,\hat{\mathbf{y}}$$

Si la caja está muy cerca de la superficie terrestre, $h = 0$ o es muy pequeño, por lo que la aceleración será

$$\vec{\mathbf{a}} = -\frac{GM}{R^2}\,\hat{\mathbf{y}}$$

y sustituyendo la masa de la Tierra, $M = 5.97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ y su radio, $R = 6.37 \cdot 10^6\,\text{m}$, nos queda $\vec{\mathbf{a}} = -9.8\,\text{m/s}^2\,\hat{\mathbf{y}}$, lo cual habíamos definido como $\vec{\mathbf{g}}$ en los capítulos anteriores (ver fig. 5.9).

Definimos el **campo gravitacional de aceleraciones** como

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_G}{m}, \qquad m \text{ pequeña}$$

Consideramos m pequeña para que por sí misma no altere mucho el campo que la rodea. En la fig. 5.10 se muestra una gráfica en la que se han dibujado varios vectores del campo de aceleraciones gravitacional. Observemos que todas las flechas van hacia adentro, y que disminuyen rápidamente su tamaño con la distancia.

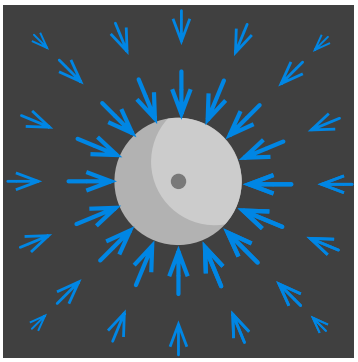


Figura 5.10: Campo gravitacional

El movimiento de un cuerpo bajo un campo gravitacional es, en general, un problema difícil de resolver (se debe recurrir, incluso, a simulaciones). A la trayectoria de un cuerpo debido a la gravitación se le llama *órbita*. La órbita más sencilla para estudiar es la *órbita circular*. Para ello, suponemos que un cuerpo pequeño, de masa m, orbita a otro de masa mucho mayor, M. Por ejemplo, un satélite alrededor de la Tierra, o la Tierra alrededor del Sol. Los centros de ambos cuerpos están separados por una distancia r. Queremos encontrar el periodo de la órbita. Entonces, dejemos que la fuerza centrípeta sea igual a la gravedad:

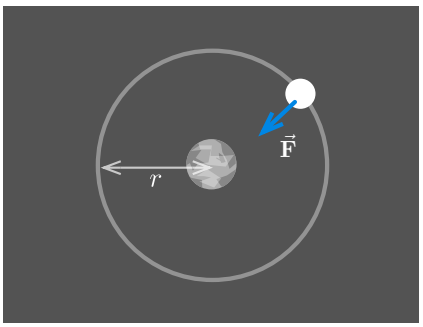


Figura 5.11: Órbita circular

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{5.6}$$

Observemos que de esta ecuación podríamos despejar v, después, con la ec. 5.4 podemos encontrar ω y por último, con la ec. 5.3 podemos encontrar T, el periodo de la órbita.

Ejemplo 5.5. *Órbita de la Luna.*

Sabiendo que la masa de la Tierra es $M = 5.97 \cdot 10^{24}$, y que la Luna completa una órbita alrededor de la Tierra cada 27.3 días, calcule la velocidad angular y la distancia Tierra-Luna.

Solución: El periodo de la Luna es $27.3\,\text{d} = 2.4 \cdot 10^6\,\text{s}$. Con esto, sabemos que $\omega = 2\pi/T = 2.6 \cdot 10^{-6}\,\text{Hz}$. Ahora, $v = \omega r$. Sustituyendo en la ec. 5.6, y cancelando la masa de la Luna,

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{(\omega r)^2}{r} \implies \frac{GM}{\omega^2} = r^3$$

con lo que $r = \sqrt[3]{GM/\omega^2} = 3.9 \cdot 10^8\,\text{m}$. La Luna "cae" constantemente alrededor de la Tierra; la diferencia con la caída libre que vimos en la §2.8 es, a parte de la cercanía con la superficie terrestre, que

Puntos clave

- Gravitación: fuerza de atracción entre cuerpos con masa: $F_G = Gm_1m_2/r^2$
- Gravitación para esferas perfectas: se reemplaza la esfera con una partícula de la misma masa ubicada en el centro (para puntos exteriores a su superficie)
- Campo: cantidad que tiene un valor para cada punto del espacio
- Campo gravitacional de aceleraciones: $\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{F}}_G/m$, m peq.
- Órbitas circulares: la gravitación actúa como fuerza centrípeta: $GMm/r^2 = mv^2/r$; $\omega = 2\pi/T$.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

la velocidad de la Luna es precisamente la adecuada para mantener una órbita circular.

Ejemplo 5.6. *Estación Espacial Internacional.*

La Estación Espacial Internacional se encuentra a 410 km de altura respecto a la superficie de la Tierra. El radio de la Tierra es de 6370 km. a) Calcule la velocidad angular de la órbita. b) Calcule el periodo de la órbita. c) ¿Cuántas vueltas da la Estación Espacial por día?

Solución: Igual que en el ejemplo anterior, sustituimos $v = \omega r$ en la ec. 5.6:

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{(\omega r)^2}{r} \implies \omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

donde $r = 410 \cdot 10^3 + 6370 \cdot 10^3 = 6.78 \cdot 10^6$ m. Sustituyendo los números y sacando raíz cuadrada, $\omega = 0.00113$ Hz. Por lo tanto, el periodo es $T = 2\pi/\omega = 5560$ s $= 92.67$ min. Dado que el día tiene 24 h $= 1440$ min, la Estación Espacial Internacional da $1440/92.67 = 15.54$ vueltas por día.

5.4 Resortes y oscilaciones

Cuando un resorte se estira o encoje, existe una **fuerza elástica** proporcional al estiramiento. Esta fuerza se encuentra con la *ley de Hooke*:

$$F_x = -k(x - x_0)$$

donde $x - x_0$ es el desplazamiento del resorte de su posición de equilibrio (cuando el resorte no tiene fuerzas externas), y k es la *constante del resorte*, que depende de cada resorte e indica qué tan elástico es (unidades: N/m). Es común elegir el marco de referencia de forma que $x_0 = 0$. El signo menos significa que la fuerza es *restauradora*, es decir trata de regresar al resorte a su posición original (fig. 5.12).

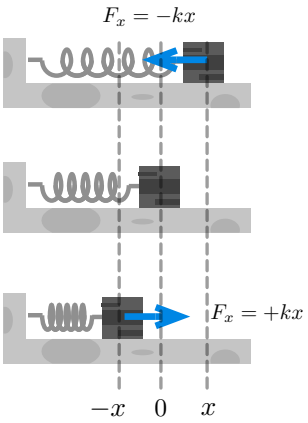


Figura 5.12: Ley de Hooke

Ejemplo 5.7. *Medición de k.*

Una masa de 4 kg cuelga de un resorte que tiene un extremo atado al techo. Respecto a la posición de equilibrio del resorte, el estiramiento registrado es de $\Delta y = 0.3$ m. Calcule la constante del resorte.

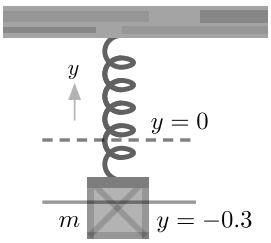


Figura 5.13: Ejemplo: medición de k.

Solución: Las fuerzas que actúan sobre la caja son: la gravedad, $-mg$, y la fuerza elástica, $+ky$, positiva porque hacia arriba se encuentra la posición de equilibrio del resorte. Haciendo suma de fuerzas se encuentra

$$ky - mg = 0 \implies k = mg/y = 131\,\text{N/m}$$

5.5 Movimiento armónico simple

En la §2.6, calculamos el movimiento de una caja unida a un resorte con el método de las simulaciones. Habíamos visto en la fig. 2.8 que el resultado de la simulación es una función seno o coseno. La partícula

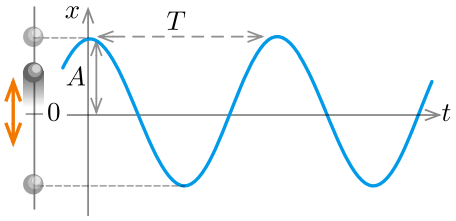


Figura 5.14: Movimiento armónico simple

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

hace un **movimiento oscilatorio**, es decir, va y viene repetidamente. El **movimiento armónico simple** es un tipo de movimiento oscilatorio cuya posición en función del tiempo es

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{5.7}$$

(También podríamos haber usado la función seno). Hemos graficado el movimiento en la fig. 5.14. A es la *amplitud* del movimiento, es decir, la posición máxima respecto al origen. Al igual que el movimiento circular, el tiempo que transcurre entre oscilaciones es el *periodo* T, y la frecuencia es $f = 1/T$, y representa las veces por segundo que ocurre una oscilación. Definimos la *frecuencia angular* como

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{5.8}$$

Cuando una partícula se encuentra bajo la acción de la fuerza elástica, la aceleración se encuentra con la segunda ley de Newton:

$$-kx = ma \implies a = -kx/m$$

En la §2.6, utilizamos la aceleración $a = -\omega^2 x$, con lo que, comparando vemos que

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{5.9}$$

Puntos clave
Resortes y movimiento armónico simple:

- Posición: **función seno o coseno** del tiempo
- Se repite cada T segundos
- Ocurren f oscilaciones por segundo
- Amplitud A
- Ley de Hooke: $F = -kx$
- Frecuencia angular de oscilación: $\omega^2 = k/m$

Ejemplo 5.8. *Sombra de un péndulo.*

La sombra de un péndulo sigue un movimiento aproximadamente armónico simple, de acuerdo con la ecuación

$$x(t) = (8\,\text{cm})\cos\left([4.48\,\text{s}^{-1}]t\right)$$

Escriba el periodo de oscilación, la amplitud y la frecuencia.

Solución: Comparando con la ec. 5.7, tenemos que la amplitud es 8 cm, y $\omega = 4.48\,\text{s}^{-1}$. Entonces, $T = 2\pi/\omega = 1.4\,\text{s}$, y $f = 1/T = 0.71\,\text{Hz}$.

Ejemplo 5.9. *Caja y resorte.*

Una caja de masa $m = 0.4\,\text{kg}$ se conecta a un resorte de constante $k = 120\,\text{N/m}$ y se pone a oscilar con amplitud $A = 0.5\,\text{m}$. Calcule: a) la frecuencia angular ω de la oscilación; b) el periodo T; c) la ecuación del movimiento $x(t)$.

Solución: a) Utilizando la ec. 5.9, calculamos $\omega = \sqrt{k/m} = 17.3\,\text{s}^{-1}$. b) La ec. 5.8 nos da ahora el periodo: $T = 2\pi/\omega = 0.36\,\text{s}$. c) Comparando entonces con la ec. 5.7,

$$x(t) = (0.5\,\text{m})\cos\left(17.3\,\text{s}^{-1}t\right)$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

6 Cargas eléctricas y fluidos

6.1 Carga eléctrica

En este capítulo examinaremos cómo las fuerzas actúan en diferentes escalas en la materia: desde los átomos hasta los fluidos.

La **carga eléctrica** es una propiedad de la materia. La materia está compuesta por átomos, cuyo tamaño es del orden de 10^{-10} m. Los átomos, a su vez, están compuestos por un núcleo (protones y neutrones), el cual tiene carga positiva (los protones tienen carga positiva y los neutrones no tienen carga), y electrones a su alrededor, que tienen carga negativa (en la fig. 6.1 se muestra un esquema que ilustra la estructura del átomo). La unidad de carga eléctrica en el sistema internacional es el coulomb (C). La carga de un electrón es $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C, y la de un protón, $q_p = +1.6 \cdot 10^{-19}$ C, es decir, la misma del electrón pero con signo positivo.

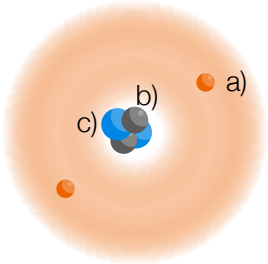


Figura 6.1: Átomo: a) electrón (carga negativa), b) neutrón (sin carga), c) protón (carga positiva)

Las cargas eléctricas se ejercen mutuamente una fuerza de magnitud

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \tag{6.1}$$

donde q es el símbolo para la carga y $k = 8.99 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2} es una constante. Por tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$. La ec. 6.1 se llama **ley de Coulomb** o **fuerza electrostática**.

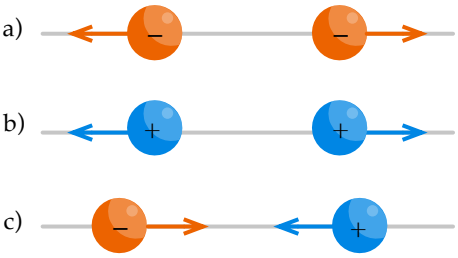


Figura 6.2: Fuerza electrostática: a y b) cargas iguales se repelen, c) cargas diferentes se atraen

Dos cargas *iguales* (ambas positivas o ambas negativas), se *repelen* mutuamente, es decir que su fuerza va en dirección *hacia afuera* (figs. 6.2a y 6.2b). En cambio, dos cargas *diferentes* se *atraen*, es decir que su fuerza va *hacia adentro* (fig. 6.2c). Hay que tomar en cuenta esto para escribir la fuerza electrostática como un vector. Además, recordemos que las fuerzas solo se pueden sumar como vectores, por lo que siempre hay que sacar las componentes cartesianas del vector fuerza al resolver un problema.

Veamos ahora el papel de la fuerza electrostática en un átomo. Los átomos consisten en un núcleo de carga positiva, rodeados por una región donde hay una probabilidad de encontrar a un electrón en un momento dado. En la escala del átomo, las reglas de la mecánica clásica ya no son válidas, sino que rige la mecánica cuántica. No obstante, si nos imaginamos por un momento que la mecánica clásica fuera válida, obtendríamos una imagen aproximada de lo que ocurre en el átomo (fig. 6.3). Los electrones del átomo sienten una fuerza de atracción debido al núcleo y viceversa. Sin embargo, dado que la masa del núcleo es mucho mayor que la de los electrones (unas 1800 veces mayor), son los electrones los que hacen todo el movimiento, y podemos pensar que la fuerza eléctrica actúa como fuerza centrípeta:

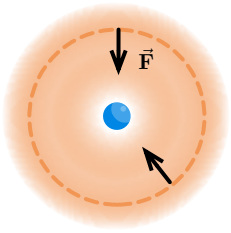


Figura 6.3: Átomo de hidrógeno

$$\frac{k q_{\text{núcleo}} q_{\text{electrón}}}{r^2} = \frac{m_{\text{electrón}} v^2}{r}$$

Es la fuerza electrostática, entonces, la que causa el movimiento de los electrones alrededor del núcleo.

Ciertos electrones de un átomo pueden desprenderse o añadirse a él con relativa facilidad. Un átomo con el mismo número de electrones que de protones se dice que es *eléctricamente neutro*. Cuando se les ha arrancado electrones a los átomos de una sustancia, hay más cargas positivas que negativas, por lo que se dice que la sustancia en sí está *cargada positivamente*. Cuando más bien los átomos de una sustancia tienen electrones de más, se dice que está *cargada negativamente*.

Los átomos también pueden unirse entre ellos mediante fuerzas electrostáticas, formando con ello *moléculas*. En los siguientes ejemplos analizaremos fuerzas electrostáticas en moléculas.

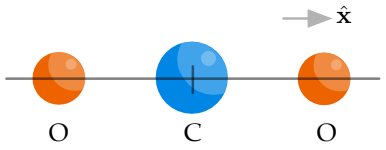


Figura 6.4: Molécula de dióxido de carbono.

Ejemplo 6.1. *Dióxido de carbono.*

El dióxido de carbono (CO_2) tiene una estructura como la de la fig. 6.4. Si la distancia entre cada átomo es $r = 1.16 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$, la carga de cada oxígeno es $q_O = -2|q_e|$ y la del carbono es $q_C = +4|q_e|$, calcule la fuerza electrostática neta para a) el átomo de carbono, b) el átomo de oxígeno a la izquierda del diagrama.

Solución: a) Para el átomo de carbono, observemos que la fuerza que le hace el átomo de la izquierda es $-k \cdot 8|q_e|^2/r^2\,\hat{\mathbf{x}}$, y el de la derecha, $+k \cdot 8|q_e|^2/r^2\,\hat{\mathbf{x}}$ (ambos atracción), por lo que se cancelan y la fuerza sobre el átomo de carbono es cero. b) Para el átomo de la izquierda, tendremos que la fuerza que le hace el átomo de carbono es

$$\vec{\mathbf{F}}_C = +k\frac{|+4q_e \cdot -2q_e|}{r^2}\,\hat{\mathbf{x}} = 1.37 \cdot 10^{-7}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{x}}$$

(atracción) y la fuerza que le hace el átomo de oxígeno que está a la derecha es

$$\vec{\mathbf{F}}_O = -k\frac{|-2q_e \cdot -2q_e|}{(2r)^2}\,\hat{\mathbf{x}} = -1.7 \cdot 10^{-8}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{x}}$$

(repulsión) por lo que la fuerza total será

$$\vec{\mathbf{F}} = (1.37 \cdot 10^{-7} - 1.7 \cdot 10^{-8})\,\hat{\mathbf{x}} = 1.2 \cdot 10^{-7}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{x}}$$

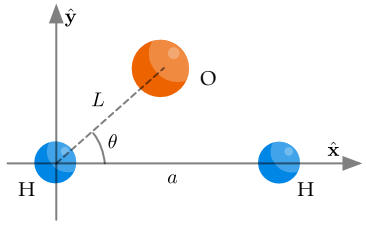


Figura 6.5: Molécula de dióxido de carbono.

Ejemplo 6.2. *Molécula de agua.*

Una molécula de agua (H_2O) consta de dos átomos de hidrógeno, ambos con una carga positiva $+|q_e|$, y un átomo de oxígeno, de carga negativa $-2|q_e|$ (fig. 6.5). Además, $L = 96 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$, $a = 2L\cos\theta = 1.5 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$, $\theta = 40°$. Calcule la fuerza neta sobre el átomo de hidrógeno que se encuentra en el origen.

Solución: Primero calculamos las componentes de la fuerza que sobre el hidrógeno del origen hace el oxígeno:

$$\vec{\mathbf{F}}_O = +F_{\text{el}}\cos\theta\,\hat{\mathbf{x}} + F_{\text{el}}\sin\theta\,\hat{\mathbf{y}}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

donde la fuerza eléctrica F_{el} es

$$F_{\text{el}} = k\frac{|-2q_e \cdot q_e|}{L^2} = k\frac{2|q_e|^2}{L^2} = 5 \cdot 10^{-8}\,\text{N}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{F}}_O = (3.8 \cdot 10^{-8}\,\hat{\mathbf{x}} + 3.2 \cdot 10^{-8}\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{N}$$

Ahora, la fuerza eléctrica que hace el átomo de hidrógeno que se encuentra en $x = a$ es

$$\vec{\mathbf{F}}_H = -k\frac{|q_e|^2}{a^2}\,\hat{\mathbf{x}} = -1 \cdot 10^{-8}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{x}}$$

por lo que la fuerza total será

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_O + \vec{\mathbf{F}}_H = (2.8 \cdot 10^{-8}\,\hat{\mathbf{x}} + 3.2 \cdot 10^{-8}\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{N}$$

6.2 Campo eléctrico

Supongamos que tenemos una carga eléctrica Q, y otra carga q mucho más pequeña que la primera, a la que vamos a llamar carga de prueba. La carga de prueba siempre será positiva, por definición. En la §5.3 vimos cómo con una masa de prueba se definía el campo gravitacional; de forma análoga, vamos a definir el **campo eléctrico** por medio de la carga de prueba como

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q}, \qquad q \text{ pequeña} \tag{6.2}$$

y representa el efecto que hace una carga a su alrededor sobre otras cargas. Con la definición anterior, el campo eléctrico de la carga Q tendría una magnitud

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

y, si Q es positivo, va hacia afuera; si Q es negativo, va hacia adentro (figs. 6.6a y 6.6b). Despejando $\vec{\mathbf{F}}$, la ec. 6.2 también nos sirve para calcular la fuerza que la carga de prueba experimenta en presencia de un campo eléctrico externo ($\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$, ver figs. 6.6c y 6.6d).

Puntos clave

- Carga eléctrica: propiedad de la materia
- Átomo: formado por electrones, protones y neutrones
- Electrones: carga negativa; protones: carga positiva
- Moléculas: átomos agrupados por fuerzas electrostáticas
- Magnitud de la fuerza electrostática: $F = k|q_1 q_2|/r^2$
- Cargas iguales se repelen, cargas diferentes se atraen
- Campo eléctrico: $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}/q, \quad q$ peq.
- Si hay una partícula en un campo eléctrico externo, su fuerza es $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$.

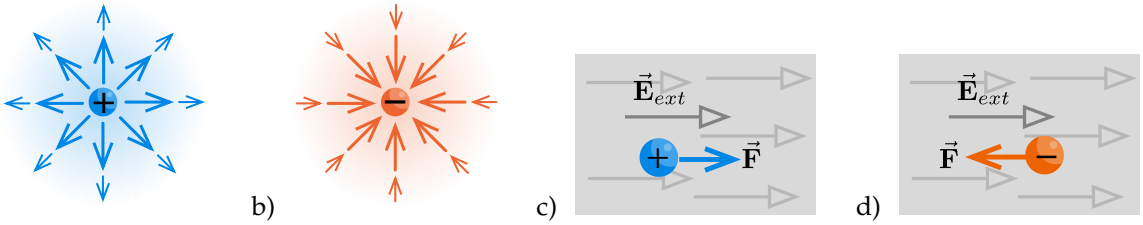


Figura 6.6: a) Campo eléctrico de una carga positiva. b) Campo eléctrico de una carga negativa. c) Partícula positiva en un campo eléctrico externo. d) Partícula negativa en un campo eléctrico externo. Observe las direcciones de los vectores dependiendo del signo de la carga.

Ejemplo 6.3. *Campo eléctrico de un dipolo.*

Un *dipolo* consiste en dos cargas eléctricas idénticas de signos diferentes. En la fig. 6.7 se muestra una carga positiva de $q_+ = +4\,\text{nC}$ en el origen, y una carga negativa $q_- = -4\,\text{nC}$ en $x_- = 0.2\,\text{m}$. a) Calcule

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

el campo eléctrico que hace cada carga en el punto P, $x_P = 0.6\,\text{m}$. b) ¿Cuál es el campo eléctrico total en P?

Solución: a) El vector campo eléctrico que hace la carga positiva es $\vec{\mathbf{E}}_+ = E_+\,\hat{\mathbf{x}}$, donde $E_+ = kq/x_P^2 = 100\,\text{N/C}$, con lo que $\vec{\mathbf{E}}_+ = +100\,\text{N/C}\,\hat{\mathbf{x}}$. El campo eléctrico de la carga negativa va hacia la izquierda, por lo que $\vec{\mathbf{E}}_- = -E_-\,\hat{\mathbf{x}}$, con $E_- = kq/(x_P - x_-)^2 = 225\,\text{N/C}$, con lo que $\vec{\mathbf{E}}_- = -225\,\text{N/C}\,\hat{\mathbf{x}}$. b) El campo total en el punto P es, entonces, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_+ + \vec{\mathbf{E}}_- = -125\,\text{N/C}\,\hat{\mathbf{x}}$.

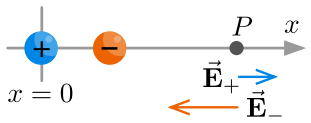


Figura 6.7: Campo eléctrico de un dipolo

Ejemplo 6.4. *Partícula en un campo eléctrico externo.*

En una región del espacio existe un campo eléctrico (externo) constante $\vec{\mathbf{E}} = +10\,\text{N/C}\,\hat{\mathbf{x}}$. Se coloca primero una partícula positiva de carga $q_1 = +3\,\mu\text{C}$ y masa $m = 0.1\,\text{kg}$. a) Calcule la aceleración (vector) que experimenta la partícula. b) Se quita la carga anterior y se coloca una partícula negativa de carga $q_2 = -2\,\mu\text{C}$ y masa $m = 0.03\,\text{kg}$. Calcule la aceleración que experimenta la partícula.

Solución: Con la ec. 6.2 vamos a calcular la fuerza que experimenta cada partícula, y luego vamos a usar la segunda ley de Newton para calcular la aceleración. a) $\vec{\mathbf{F}}_1 = q_1\vec{\mathbf{E}} = 30\cdot 10^{-6}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{x}}$ con lo que $\vec{\mathbf{a}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_1/m_1 = 3\cdot 10^{-4}\,\text{m/s}^2\,\hat{\mathbf{x}}$. b) Ahora, vemos que debido a la carga negativa de la partícula 2, la fuerza irá hacia la izquierda: $\vec{\mathbf{F}}_2 = q_2\vec{\mathbf{E}} = -20\cdot 10^{-6}\,\text{N}\,\hat{\mathbf{x}}$. Al utilizar la segunda ley de Newton vemos que la aceleración también va hacia la izquierda: $\vec{\mathbf{a}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_2/m_2 = -6.7\cdot 10^{-4}\,\text{m/s}^2\,\hat{\mathbf{x}}$

6.3 Corriente eléctrica y campo magnético

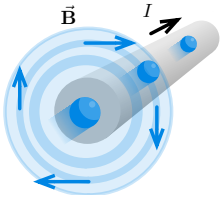


Figura 6.8: Campo magnético

Las cargas eléctricas no solamente experimentan fuerzas por el hecho de estar una cerca de la otra (fuerza electrostática), sino que también, si hay movimiento relativo entre ellas, se produce un fenómeno llamado **magnetismo**, que da origen a una fuerza magnética.

Las cargas eléctricas en movimiento forman una **corriente eléctrica** I, definida como la carga que pasa por unidad de tiempo:

$$I = \frac{q}{t} \tag{6.3}$$

La unidad de la corriente eléctrica es el ampere (A); $1\,\text{A} = 1\,\text{C/s}$.

Una corriente eléctrica como la de la fig. 6.8, genera a su alrededor un **campo magnético**. Por ejemplo, en el caso de cargas que se muevan en línea recta con velocidad constante (es decir, una alambre recto y largo, que transporta una corriente eléctrica constante), el campo magnético tiene una magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{6.4}$$

donde r es la distancia (perpendicular) hasta la línea donde se mueven las cargas y $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\text{N A}^{-2}$ es una constante. La dirección del campo magnético va dada con la regla de la mano derecha aplicada como en la fig. 6.9: el pulgar apunta hacia donde se mueven las cargas y los demás dedos apuntan en la dirección del campo magnético.

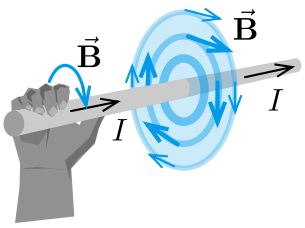


Figura 6.9: Regla de la mano derecha para la dirección del campo magnético.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

La ec. 6.4, junto con la forma de obtener la dirección del campo magnético, son un caso muy sencillo de aplicación de la *ley de Ampère*, que permite en general encontrar el campo magnético en un punto a partir de las corrientes presentes en un problema dado. Las unidades del campo magnético en el sistema internacional son *teslas* (T), $1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{kg\ s^2\ A^{-1}}$.

Ahora, queremos saber el campo magnético de una corriente que circule a través de un alambre de forma circular, en su centro. Para ello, siguiendo la fig. 6.10, doblamos un alambre recto a ambos lados con un ángulo θ y radio R. Como lo doblamos a ambos lados a la vez, observamos en la figura que, en el centro del círculo, los campos magnéticos se suman pues van en la misma dirección. Por lo tanto, la ec. 6.4 nos da el campo magnético en el centro por ángulo doblado. Al terminar de doblar el alambre, $\theta = \pi\,\mathrm{rad}$, con lo que

$$B_{\text{centro}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \times \pi = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{6.5}$$

Por otro lado, en la fig. 6.11 tenemos el campo magnético del alambre circular, calculado con más detalle. Observamos que cerca del centro del alambre, hay una región donde el campo magnético *sale* del plano del alambre: a esa región se llama **polo norte**; a la región donde *entra* el campo magnético al plano del alambre se le llama **polo sur**. No se conoce ninguna forma de separar los polos magnéticos; el magnetismo siempre se presenta en forma de *dipolos*.

Debido a que los átomos tienen electrones girando alrededor del núcleo, puede pensarse en ellos como una corriente eléctrica circular. En la mayoría de materiales, los átomos están orientados aleatoriamente y los campos magnéticos producidos por ellos se cancelan. En algunos materiales, llamados *ferromagnéticos*, sin embargo, los átomos se alinean de tal forma que los campos magnéticos de cada átomo se suman y forman un campo total: eso es lo que ocurre con los imanes. La *magnetita* (Fe_3O_4), por ejemplo, es un mineral fácilmente magnetizable que forma imanes permanentes.

En el interior de la Tierra también se forman corrientes eléctricas debido a su rotación, que generan un campo magnético similar al de un dipolo (fig. 6.12), y de una magnitud del orden de unos $50\,\mu\mathrm{T}$.

Los polos opuestos (norte-sur) se atraen, y los polos iguales (norte-norte, sur-sur) se repelen, de forma similar a las cargas eléctricas. Esta es la razón por la que funcionan las *brújulas*, que son pequeños imanes que se dejan libres para girar, de modo que apunten hacia el norte utilizando el campo magnético terrestre.

6.4 Fuerza magnética

Si ponemos una carga eléctrica en movimiento en una región donde haya un campo magnético *externo*, esta experimenta una **fuerza de Lorentz** o **fuerza magnética** dada por

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{6.6}$$

Ejemplo 6.5. *Magnetismo.*

Una carga de $3\,\mu\mathrm{C}$ viaja con rapidez $v = 4\,\mathrm{m/s}$ de forma paralela a un alambre recto y largo que lleva una corriente de $1\,\mathrm{A}$, a $1\,\mathrm{m}$ de

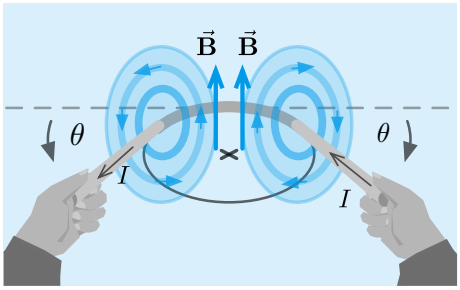


Figura 6.10: Doblado de un alambre donde pasa corriente eléctrica. En el centro del círculo, el campo magnético de ambos lados del alambre va en la misma dirección, por lo que se suma.

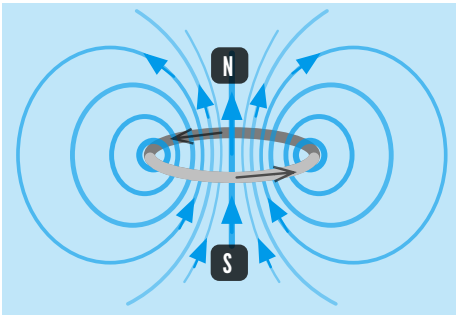


Figura 6.11: Campo magnético de un alambre circular.

Puntos clave

- Corriente eléctrica: cargas en movimiento
- Las cargas eléctricas en movimiento generan campos magnéticos
- El magnetismo siempre se presenta en forma de dipolos (polo norte, polo sur); no se pueden separar
- Fuerza de una carga eléctrica al moverse por un campo magnético externo: $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$

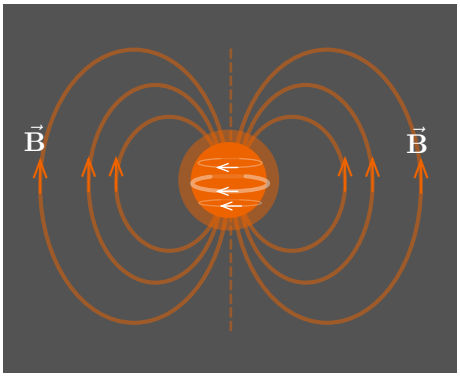


Figura 6.12: Campo magnético terrestre

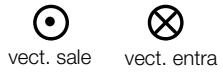


Figura 6.13: Símbolos de un vector que sale y entra, respectivamente, del plano de la página

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

distancia (ver fig. 6.14. a) Calcule la magnitud del campo magnético en la posición de la carga, usando la ec. 6.4. b) Calcule la magnitud de la fuerza que experimenta en ese momento la carga.

Solución: a) Calculamos el campo con la ec. 6.4: $B = \mu_0 \times 1/(2\pi \times 1) = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$. Debido a la regla de la mano derecha, como se muestra en el diagrama, el campo magnético va en dirección $-\hat{\mathbf{y}}$ en el punto donde se encuentra la carga. b) Vemos que la velocidad y el campo magnético hacen entre ellos un ángulo de 90°, por lo que $F = qvB\sin 90° = qvB = 2.4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}$. Por la regla de la mano derecha, la fuerza va en dirección $-\hat{\mathbf{x}}$. El procedimiento de este problema se puede utilizar para encontrar la fuerza de atracción entre dos alambres.

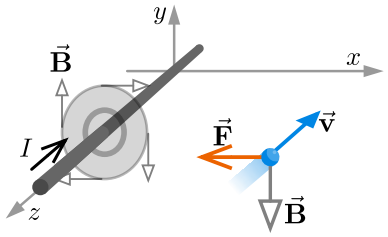


Figura 6.14: Protón en un campo magnético

En la fig. 6.15 tenemos un campo magnético constante en magnitud y dirección (utilizamos los símbolos de la fig. 6.13 para indicar que en este caso el campo magnético entra al plano de la página). Como vemos en la figura, al calcular el producto cruz $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (usando la regla de la mano derecha), la fuerza siempre nos da en la misma dirección: radialmente hacia adentro. Por lo tanto, utilizando este hecho, podemos decir que la fuerza magnética actúa como fuerza centrípeta:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \tag{6.7}$$

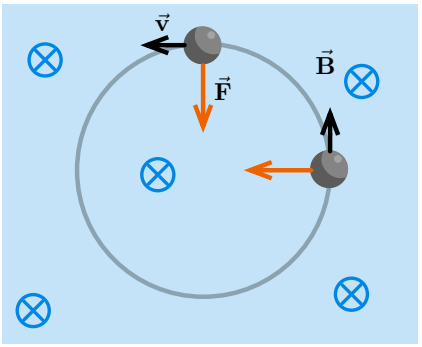


Figura 6.15: Movimiento circular en un campo magnético para una carga positiva. Si la carga es negativa, $\vec{\mathbf{v}}$ debe ir en sentido contrario.

El **plasma** es básicamente un conjunto de cargas eléctricas bajo la influencia de campos eléctricos y magnéticos. El plasma es la forma más abundante de materia en el universo visible; las estrellas y parte del medio interestelar están constituidos por plasma. Además, las descargas eléctricas (rayos) también son plasma. En presencia de un campo magnético, el plasma presenta un movimiento circular como el de la fig. 6.15.

Ejemplo 6.6. *Plasma en el Sol.*

El Sol está constituido por plasma (fig. 6.16). Suponga que en una región de su superficie hay un campo magnético constante de $\vec{\mathbf{B}} = -0.01\,\mathrm{T}\,\hat{\mathbf{z}}$. Calcule el radio y la frecuencia a la que giran los electrones del plasma, si estos se mueven con una rapidez de $4 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$. (Recuerde que $|q_e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, y $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$)

Solución: Utilizamos la ec. 6.7, despejando r, para obtener $r = mv/(qB) = 2.3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. La frecuencia la podemos obtener calculando primero la velocidad angular $\omega = v/r = 1.7 \cdot 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$, con lo que $f = \omega/(2\pi) = 2.7 \cdot 10^8\,\mathrm{Hz} = 271\,\mathrm{MHz}$.

Figura 6.16: Superficie solar

6.5 Fuerzas en la materia, presión

Las fuerzas electrostáticas no solo son las responsables de formar átomos y moléculas, sino que también unen las moléculas entre sí mediante las *fuerzas intermoleculares*, como se muestra en la fig. 6.17b, formando diferentes *fases*. Si la magnitud de las fuerzas es grande, las moléculas no tienen margen de movimiento, y forman un **sólido**, que estudiaremos en el cap. 8. En los **líquidos**, las fuerzas intermoleculares son más débiles, y los enlaces entre moléculas se forman y rompen

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

constantemente. Las moléculas de un **gas**, en cambio, no tienen fuerzas intermoleculares, y se mueven libremente en un movimiento caótico.

A los líquidos y gases en conjunto se les llama **fluidos**. En un fluido, las moléculas colisionan constantemente contra las paredes del contenedor, impartiéndoles una fuerza de reacción perpendicular a estas (fig. 6.17a). Vamos a definir la **presión** como la fuerza promedio ejercida por el fluido por unidad de área A de la pared:

$$p = \frac{F_\perp}{A} \tag{6.8}$$

Las unidades de la presión son *pascales* ($1\,\text{Pa} = 1\,\text{N/m}^2$). Si se aplica una fuerza externa a un fluido, como se muestra en la fig. 6.18, la presión extra se transmite uniformemente por todo el fluido. A este hecho se le llama *principio de Pascal*.

El principio de Pascal se utiliza frecuentemente en varios tipos de aparatos hidráulicos. En la fig. 6.19 observamos un elevador hidráulico, el cual está lleno de un fluido. Como la presión se transmite uniformemente, la presión en todos los puntos debe ser la misma, incluyendo en el pistón 1 y el pistón 2. En este momento debemos hacer una distinción entre los fluidos: los que pueden o no variar su volumen. Los gases son fluidos *compresibles*, es decir, que pueden cambiar con relativa facilidad su volumen al aplicar una presión. Los líquidos son fluidos *incompresibles*, es decir que es muy difícil cambiar su volumen al aplicar una presión. En nuestro elevador hidráulico, necesitaremos un fluido incompresible, como aceite o agua. Entonces, el volumen que el pistón 1 desciende es el mismo volumen que el pistón 2 se eleva:

$$A_1 h_1 = A_2 h_2$$

y además, según el principio de Pascal, las presiones son iguales:

$$P_1 = P_2 \implies \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Estas ecuaciones nos dicen que si en el pistón 1 reducimos el área respecto a la del pistón 2, por ejemplo, si $A_1 = A_2/10$, entonces la fuerza en 1 es $F_1 = F_2 A_1/A_2 = F_2/10$, es decir que con 10 veces menos fuerza se puede levantar un peso colocado sobre el pistón 2. No obstante, la altura que debe moverse el pistón 1 es $h_1 = h_2 A_2/A_1 = 10h_2$, es decir, diez veces mayor.

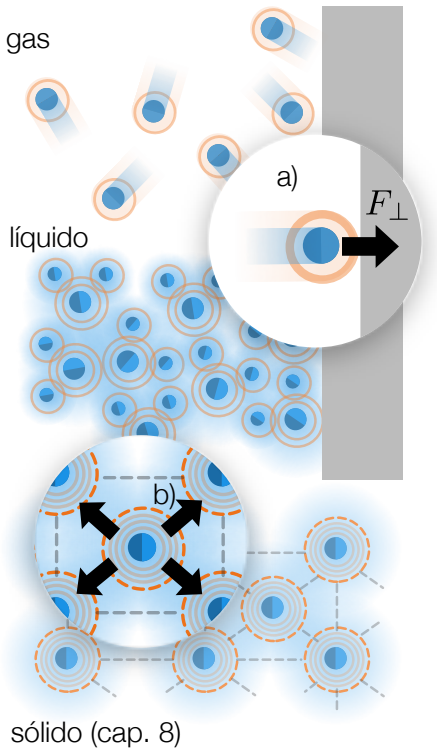


Figura 6.17: Fases de la materia

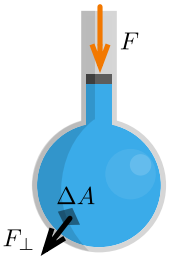


Figura 6.18: Presión

Ejemplo 6.7. *Revisión técnica vehicular.*

Un elevador hidráulico utilizado para la revisión técnica vehicular funciona como el de la figura 6.19. Si se intenta levantar un carro de 1000 kg por una altura $h = 60\,\text{cm}$ utilizando una pesa de 50 kg que descansa sobre un pistón de 1 cm de diámetro, calcule: a) el diámetro del pistón que sostiene al carro; b) la altura que debe moverse la pesa.

Solución: a) El área del pistón que sostiene la pesa es $A_\text{pesa} = \pi(d/2)^2 = 7.9 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2$. Según el principio de Pascal,

$$\frac{m_\text{pesa} g}{A_\text{pesa}} = \frac{m_\text{carro} g}{A_\text{carro}} \implies A_\text{carro} = m_\text{carro} g \frac{A_\text{pesa}}{m_\text{pesa} g} = 0.00158\,\text{m}^2$$

lo cual implica un diámetro de $d_\text{carro} = 2\sqrt{A/\pi} = 0.045\,\text{m} = 4.5\,\text{cm}$.
b) Como el volumen desplazado es el mismo por ser un líquido in-

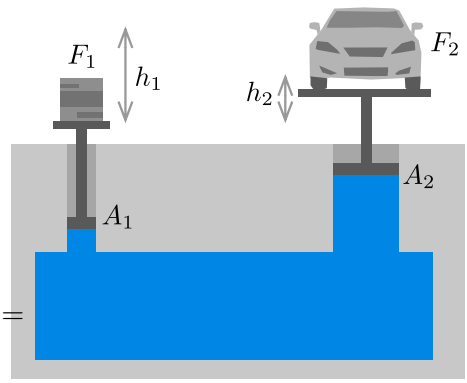


Figura 6.19: Elevador hidráulico

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

compresible:

$$A_{\text{carro}} h_{\text{carro}} = A_{\text{pesa}} h_{\text{pesa}} \implies h_{\text{pesa}} = \frac{A_{\text{carro}}}{A_{\text{pesa}}} h_{\text{carro}} = 12\,\text{m}$$

la distancia que la pesa debe recorrer es muy alta, por lo que por lo general se sustituye por un motor que bombee el líquido.

6.6 Presión atmosférica y medición de la presión

La atmósfera es una región gaseosa que rodea la superficie terrestre. Como la atmósfera es un gas, hace una *presión atmosférica* hacia todos lados. Esta presión no es despreciable; en la superficie terrestre a nivel del mar, por ejemplo, la presión es de 10^5 Pa, cantidad a la que suele llamársele *una atmósfera*.

En la fig. 6.21 observamos un instrumento llamado *barómetro*, y que se utiliza para medir la presión atmosférica. Consiste en un tubo largo lleno completamente de mercurio, el cual se vuelca boca abajo en un recipiente también lleno de mercurio. La presión atmosférica presiona hacia abajo en la superficie del mercurio, pero como la presión se transmite uniformemente por el fluido de acuerdo al principio de Pascal, al llegar a la boca del tubo, la fuerza transmitida por la presión atmosférica va hacia arriba. Esto significa que la única razón por la que no se cae el mercurio del tubo es gracias a la presión atmosférica. Si el tubo se hace muy largo, llegará un punto donde la presión atmosférica no puede soportar más el peso del mercurio, y la columna de mercurio desciende, creando un vacío en la parte superior. Este nivel se utiliza para medir la presión atmosférica. Esto es muy similar a lo que ocurre al levantar una pajilla llena de líquido tapando su extremo superior con un dedo (fig. 6.22a): el líquido no se cae debido a que la presión atmosférica lo sostiene por debajo. Esta es también la razón por la que funcionan las bombas de succión (fig. 6.22b): en la parte superior de la tubería se disminuye la presión succionando el aire, con lo que la presión atmosférica en el extremo inferior de la tubería empuja el agua hacia arriba.

Puede pensarse en la presión atmosférica como el peso del aire por unidad de área. Esto significa que la presión atmosférica desciende con la altura, puesto que al subir a un lugar alto, hay menos aire encima. Los barómetros calibrados especialmente para medir la altura se llaman *altímetros*.

Vamos a definir la **densidad** de una sustancia en cualquier fase como su masa entre su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{6.9}$$

La densidad del agua es aprox. $1000\,\text{kg/m}^3$. Cuando un fluido tiene densidad constante y uniforme, como es aproximadamente el caso en un líquido, y se coloca en un campo gravitacional, tenemos una situación como la de la figura 6.23. Ahora vamos a considerar una sección del fluido (que se ha dibujado con líneas punteadas). Eligiendo y positivo hacia arriba, hagamos una suma de fuerzas en esa sección (que debe dar cero pues el fluido está en reposo):

$$\sum F_y = 0 \implies F_2 - F_1 - mg = 0$$

Ahora vamos a usar la ec. 6.8 para sustituir las fuerzas, y además, vamos a escribir la masa usando la ec. 6.9, recordando que el volumen

Figura 6.20: Atmósfera terrestre [PD NASA]

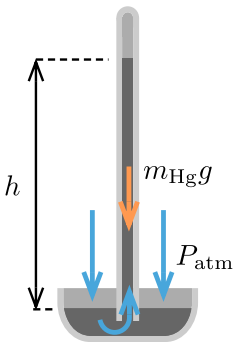


Figura 6.21: Presión atmosférica y barómetro

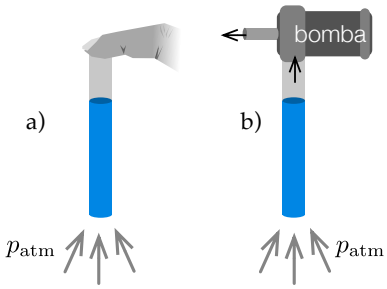


Figura 6.22: a) Dedo tapando un extremo de una pajilla. b) Bomba de agua

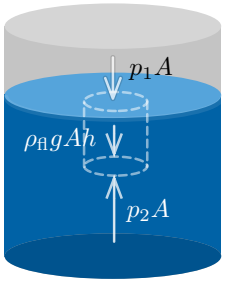


Figura 6.23: Presión en un fluido de densidad uniforme

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

de un cilindro es el área de la base por la altura:

$$p_2 A - p_1 A - \rho_{\text{fl}} A h g = 0$$

$$\implies p_2 = p_1 + \rho_{\text{fl}} g h$$

y recordando que p_1 es la presión atmosférica, podemos escribir la presión dentro de un fluido como función de su profundidad h:

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h \tag{6.10}$$

Una consecuencia importante de la ecuación anterior es que la presión en un fluido no depende de la forma del recipiente, solo de la altura del mismo.

Con un aparato similar a un barómetro, llamado *manómetro*, se puede medir experimentalmente también la presión de un gas. En la fig. 6.24 se encuentra un manómetro, que consiste en un tubo en forma de U que está lleno de un líquido cuya densidad ρ se conoce. Del otro lado está conectado un recipiente con gas cuya presión se desea medir. Consideremos ahora el punto donde el gas y el líquido se encuentran. En ese punto, llamado *interfaz*, la presión del gas hace una fuerza hacia abajo. La presión atmosférica y la gravedad del líquido, por otro lado, hacen una presión que se transmite uniformemente por todo el fluido (principio de Pascal), por lo que al llegar a la interfaz, esas presiones producen una fuerza hacia arriba. Al hacer suma de fuerzas igual a cero obtenemos:

$$p_{\text{atm}} A + \rho g h A - p_{\text{gas}} A = 0$$

con lo cual podremos calcular la presión del gas si medimos la diferencia de alturas h:

$$p_{\text{gas}} = p_{\text{atm}} + \rho g h \tag{6.11}$$

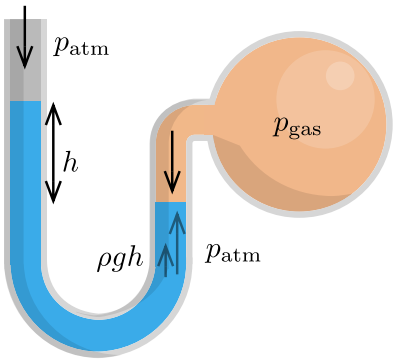


Figura 6.24: Manómetro

Puntos clave

- Densidad: $\rho = m/V$
- Presión: $p = F_{\perp}/A$
- Principio de Pascal: la presión se transmite uniformemente en un fluido
- Los gases son fluidos compresibles, los líquidos, idealmente, son incompresibles.
- Presión dentro de un líquido de densidad uniforme: $p = p_{\text{atm}} + \rho g h$
- Principio de Arquímedes: $F_b = \rho_{\text{fl}} g V_S$

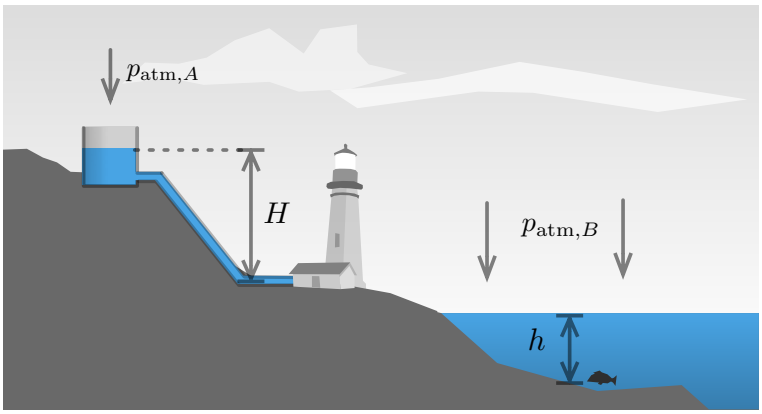


Figura 6.25: Suministro de agua para un faro

Ejemplo 6.8. *Faro.*

Un tanque de agua potable abastece al faro de la fig. 6.25, y está ubicado a una altura de 40 m, donde hay una presión atmosférica de $0.995 \cdot 10^5$ Pa. La presión atmosférica en la costa es $1.000 \cdot 10^5$ Pa. Calcule: a) la presión neta que debe ejercer el grifo para contener el agua en el faro; b) la presión que siente un pez ubicado a 5 m bajo el agua.

Solución: a) Podemos hacer una suma de fuerzas en el grifo ubicado

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

en el faro:

$$p_{\text{atm},A}A + \rho_{\text{agua}}gHA - p_{\text{atm},B}A - p_{\text{grifo}}A = 0$$

con lo que

$$p_{\text{grifo}} = p_{\text{atm,A}} - p_{\text{atm},B} + \rho_{\text{agua}}gH = 391\,500\,\text{Pa}$$

b) Para el pez, la presión es

$$p = p_{\text{atm},B} + \rho_{\text{agua}}gh = 149\,000\,\text{Pa}$$

Ejemplo 6.9. *Manómetro.*

Se utiliza un manómetro de mercurio ($\rho = 13\,534\,\text{kg/m}^3$) como el de la fig. 6.24 para medir la presión de una llanta. Si la presión atmosférica exterior es de 10^5 Pa, y la diferencia de alturas es de $h = 0.3$ m, calcule la presión del aire de la llanta.

Solución: Aplicando la ec. 6.11, encontramos que $p_{\text{gas}} = 10^5 + 13\,534 \cdot 9.8 \cdot 0.3 = 1.40 \cdot 10^5$ Pa.

6.7 Flotabilidad

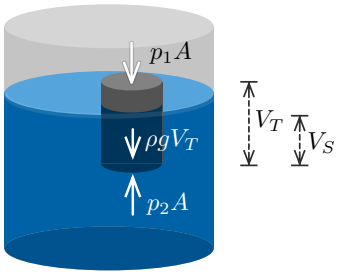


Figura 6.26: Principio de Arquímedes

Consideremos un cuerpo de volumen total V_T y densidad ρ que flota en un fluido de densidad ρ_{fl}. Queremos calcular la fuerza que experimenta este cuerpo flotante. Para ello, hacemos suma de fuerzas:

$$F_2 - F_1 - mg = 0$$

sustituimos las fuerzas por presiones multiplicadas por área:

$$p_2A - p_1A - mg = 0$$

pero, según la ec. 6.10, $p_2A - p_1A = \rho_{\text{fl}}gAh$. Si llamamos *volumen sumergido* a $V_S = Ah$, tendremos que el fluido hace una fuerza

$$F_b = \rho_{\text{fl}}gV_S \tag{6.12}$$

Esto es el *principio de Arquímedes*, que dice que un cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotabilidad F_b hacia arriba, igual a la gravedad del fluido desplazado (es decir, la fuerza es la gravedad del fluido que ocuparía espacio sumergido del cuerpo).

Para que un cuerpo se encuentre en equilibrio, la fuerza de flotabilidad debe ser igual a la gravedad del cuerpo. Si la fuerza de flotabilidad es mayor, el cuerpo subirá a flote; y si es menor, el cuerpo se hundirá.

En el caso en el que el cuerpo esté hecho de un solo material de densidad ρ, podemos sustituir la masa por ρ multiplicada por el volumen total:

$$\rho gV_T = \rho_{\text{fl}}gV_S \tag{6.13}$$

Si además el cuerpo está totalmente sumergido en el fluido, $V_T = V_S$, y de allí se ve que si un cuerpo es más denso que el fluido donde se encuentra, se hundirá; pero si es menos denso flotará.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 6.10. *Iceberg.*

Un iceberg (fig. 6.27) es un trozo grande de hielo que flota en el mar, y que se desprende de las regiones polares. Famosamente, un iceberg golpeó contra el Titanic en 1912, causando su hundimiento. Si la densidad del agua salada es de $\rho_{\text{fl}} = 1027\,\text{kg/m}^3$ y la del hielo es $\rho = 917\,\text{kg/m}^3$, calcule el porcentaje de hielo sumergido.

Figura 6.27: Iceberg. [PD]

Solución: Dado que la situación es idéntica a la de la fig. 6.26, aplicamos directamente la ec. 6.13:

$$V_S = \frac{\rho}{\rho_{\text{fl}}} V_T = 0.9 V_T$$

lo cual significa que el 90 % de un iceberg está sumergido.

Ejemplo 6.11. *Globo areostático.*

El aire que se encuentra alrededor del globo aerostático de la fig. 6.28 tiene una densidad de $\rho_{\text{fl}} = 1.2\,\text{kg/m}^3$. El aire dentro del globo, sin embargo, tiene densidad es de $\rho = 0.95\,\text{kg/m}^3$ (la densidad se puede variar calentando el aire, como veremos en el cap. 9). Si el globo debe poder levantar una carga de 100 kg, calcule el radio que debe tener el globo.

Figura 6.28: Globo aerostático. [PD]

Solución: Hacemos una suma de fuerzas. En este problema, el volumen sumergido y el total son iguales, y los llamaremos simplemente V.

$$F_b - m_{\text{carga}} g - m_{\text{globo}} g = 0$$
$$\implies \rho_{\text{fl}} g V - m_{\text{carga}} g - \rho g V = 0$$

con lo que, despejando V,

$$V = \frac{m_{\text{carga}}}{\rho_{\text{fl}} - \rho} = 400\,\text{m}^3$$

lo cual implica un radio de

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \implies r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 4.7\,\text{m}$$

Este ejemplo también nos da la idea de cómo funcionan los barcos; un barco está construido de materiales densos, pero contiene una gran porción de aire que aporta una gran fuerza de flotabilidad.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

7 Trabajo y energía

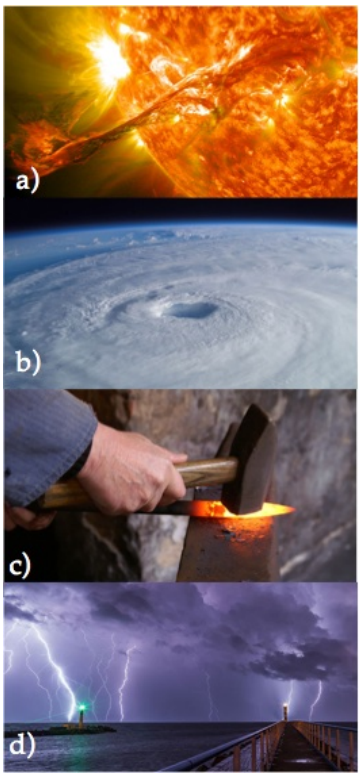


Figura 7.1: Ejemplos de algunas formas de energía: a) nuclear, b) mecánica, c) térmica, d) electromagnética. [a) CC-BY 2012 NASA, b) PD, c) PD, d) CC-BY 2014 Flickr:Maxime Raynal; adapt. men.]

7.1 Trabajo

La **energía** es una propiedad de los objetos, que puede ser transferida a otros objetos, y que adopta distintas formas: energía mecánica, electromagnética, nuclear, térmica, etc. (ver fig. 7.1). Es muy difícil ofrecer una definición más exacta sobre energía; aunque las aplicaciones del concepto están muy presentes en la vida diaria, y las estudiaremos en este y los siguientes capítulos. La energía tiene una propiedad importante, y es que se *conserva:* no es posible crear o destruir energía, sino que es una propiedad que solo se puede transferir y transformar de un objeto a otro. La conservación de la energía permite resolver problemas complejos con relativa facilidad.

El **trabajo** es una transferencia de energía que permite efectuar un *desplazamiento*. En la fig. 7.2, por ejemplo, una persona transfiere energía a una caja mediante la aplicación de una fuerza que desplaza la caja. Vamos a definir el trabajo necesario para efectuar un desplazamiento pequeño como

$$\Delta W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}, \qquad \Delta\vec{\mathbf{r}} \text{ pequeño} \tag{7.1}$$

con lo que también definimos el **trabajo total** como

$$W = \sum \Delta W \tag{7.2}$$

El trabajo es un escalar, es decir que puede ser positivo, negativo o cero. Las unidades del trabajo en el Sistema Internacional son *joules* (J), $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$.

A continuación, vamos a encontrar el trabajo de varias fuerzas.

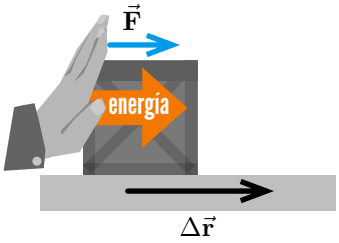


Figura 7.2: Trabajo

7.2 Trabajo de una fuerza constante y de la gravedad

El caso más sencillo es el de una fuerza constante, la cual hemos graficado en la fig. 7.3. Supongamos una fuerza constante F_0 que se aplica en una caja, y como resultado, la caja se mueve Δx en la misma dirección (fig. 7.2). Entonces, usando la ec. 7.1, el trabajo de un pequeño desplazamiento es

$$\Delta W = F_0 \Delta x \cos 0^\circ = F_0 \Delta x$$

que representa al área bajo la curva del pequeño rectángulo sombreado de la gráfica, por lo que el trabajo total será el área de toda la gráfica:

$$W = F_0 x \tag{7.3}$$

Por ejemplo, el trabajo que se requiere para mover una caja por 10 m utilizando una fuerza constante de 10 N en dirección del desplazamiento es de 100 J. En general, para una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}_0$ que desplaza $\Delta\vec{\mathbf{r}}$

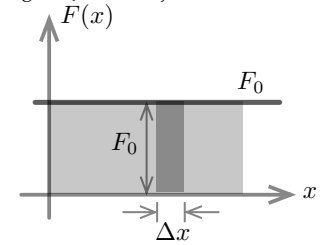


Figura 7.3: Trabajo de una fuerza constante

un cuerpo, el trabajo se calcula como

$$W = \vec{\mathbf{F}}_0 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} \tag{7.4}$$

Observemos que trabajo no es lo mismo que cansancio físico: si sostenemos una caja pesada, nos cansaremos, pero no haremos trabajo, pues la caja no se mueve. Lo que ocurre en ese caso es que, internamente, el cuerpo necesita energía para mantener los músculos contraídos, pero esa energía no es transferida a la caja en forma de trabajo.

La gravedad es también una fuerza constante, por lo que también podemos calcular el trabajo que hace la gravedad para bajar una bola de masa m por una distancia y (fig. 7.4) con la ec. 7.3:

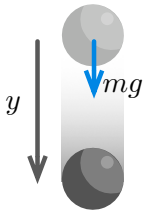


Figura 7.4: Trabajo de la gravedad

$$W = mgy \tag{7.5}$$

Ejemplo 7.1. *Arrastrar una maleta, I.*

Una pasajera va arrastrando una maleta de 2 kg hacia la derecha como en la fig. 7.5 por una distancia de $d = 0.5\,\text{m}$. Si la magnitud de la fuerza aplicada constante es $F_A = 20\,\text{N}$, $\mu_s = 0.6$ y $\theta = 30°$, calcule el trabajo que hace cada fuerza aplicada y el trabajo total sobre la caja.

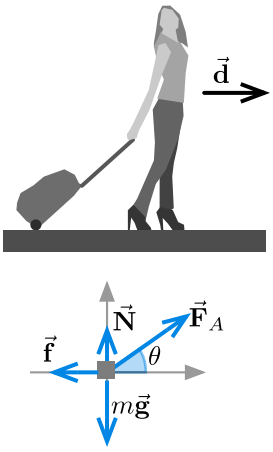


Figura 7.5: Arrastrar una maleta

Solución: En la fig. 7.5 se muestran las fuerzas que actúan sobre la caja. Conocemos la tensión y la gravedad, $mg = 19.6\,\text{N}$. Ahora, la normal la encontramos con una suma de fuerzas en y:

$$N + F_A \sin\theta - mg = 0 \implies N = mg - F_A \sin\theta = 9.6\,\text{N}$$

la fricción tiene una magnitud $f = \mu_s N = 5.76\,\text{N}$. Todas son fuerzas constantes, por lo que utilizamos la ec. 7.4 para calcular el trabajo. Entonces, el trabajo de la tensión es

$$W_F = \vec{\mathbf{F}}_A \cdot \vec{\mathbf{d}} = F_A d \cos 30° = 8.66\,\text{J}$$

el trabajo que hace la gravedad es

$$W_{mg} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = mgd \cos 90° = 0$$

el trabajo de la normal, igualmente es cero:

$$W_N = \vec{\mathbf{N}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = Nd \cos 90° = 0$$

el trabajo de la fricción es

$$W_f = \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = fd \cos 180° = -2.88\,\text{J}$$

Como observamos, el trabajo de la fricción es negativo, pues el desplazamiento y la fuerza van en direcciones contrarias: la fricción va restando energía a la caja. El trabajo total sobre la caja es

$$W_{\text{tot}} = 8.66 - 2.88 = 5.78\,\text{J}$$

Regresaremos a este ejemplo más adelante (ejemplo 7.5).

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 7.2. *Elevador, I.*

Un elevador de masa $m = 500\,\text{kg}$ se encuentra en el segundo piso de un edificio (fig. 7.6). La altura entre pisos es $h = 3\,\text{m}$. Calcule el trabajo que hace la gravedad cuando el elevador: a) sube del segundo al tercer piso, y b) baja del tercer al primer piso.

Solución: a) El trabajo será $W_{23} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{23} = mgh\cos 180^\circ = -14\,700\,\text{J}$. b) $W_{31} = m\vec{\mathbf{g}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}_{31} = mg2h\cos 0^\circ = +29\,400\,\text{J}$. Regresaremos a este ejemplo más adelante (ejemplo 7.6).

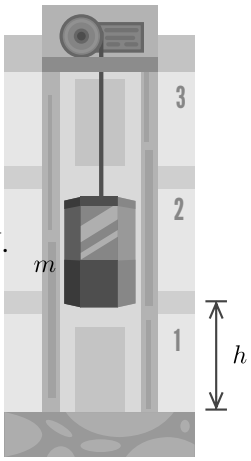


Figura 7.6: Elevador

Ejemplo 7.3. *Polea compuesta.*

En la fig. 7.7 se muestra una *polea compuesta* por una polea fija (arriba) y una polea móvil (abajo), que levantan una caja de masa m. Calcule: a) la fuerza mínima que se necesita para levantar la caja, b) el trabajo necesario, comparado con el de una sola polea fija.

Solución: Como se ve en la figura, la caja es levantada por dos cuerdas, por lo que la suma de fuerzas es $2F - mg = 0 \implies F = mg/2$, es decir, la fuerza se reduce a la mitad. Por otro lado, observemos que si la caja sube una distancia L, debido a que hay dos cuerdas, una persona debe tirar la cuerda de la derecha una distancia $2L$. Entonces, el trabajo para subir la caja será

$$W_F = \frac{mg}{2}2L = mgL$$

que es el mismo trabajo necesario para levantar la caja con una sola polea fija. Es decir, si se usa una polea compuesta, se reduce la fuerza a la mitad, pero hay que tirar de la cuerda el doble.

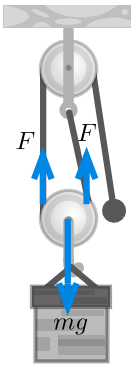


Figura 7.7: Polea compuesta

7.3 Trabajo de un resorte

En la §5.4 vimos que la magnitud de la fuerza que hace un resorte se calcula con $F = kx$, graficada en la fig. 7.8. Consideremos un resorte estirado hasta una distancia x de su posición de equilibrio. Supongamos que el resorte se suelta. El trabajo que se hace en un pequeño desplazamiento es

$$\Delta W = kx \cdot \Delta x \cdot \cos 0^\circ = kx\Delta x$$

que representa el área aproximada del área pequeña sombreada en la fig. 7.8 (la base es Δx y la altura es kx). Entonces, el trabajo total será el área total bajo la curva (área de un triángulo):

$$W = \frac{1}{2}kx \cdot x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.6}$$

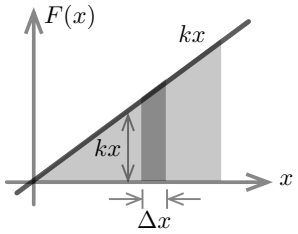


Figura 7.8: Trabajo de un resorte

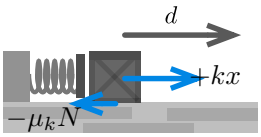


Figura 7.9: Ejemplo 7.4

Ejemplo 7.4. *Trabajo de un resorte, I.*

Una caja de masa m se propulsa hacia adelante mediante un resorte de constante k, comprimido una distancia x. Después de salir propulsada, la caja se detiene a una distancia d desde su punto de partida, debido a que hay un coeficiente de fricción cinética de μ_k con el piso. Calcule el trabajo total sobre la caja.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Solución: El trabajo hecho por el resorte es $W_{\text{res}} = +\frac{1}{2}kx^2$. La fricción es $-\mu_k N$, y la normal la podemos encontrar con una suma de fuerzas vertical: $N - mg = 0$, con lo que $N = mg$. Con esto, el trabajo de la fricción es $W_{\text{fricc}} = -\mu_k mgd$. El trabajo total es

$$W = W_{\text{res}} + W_{\text{fricc}} = \frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgd$$

Regresaremos a este ejercicio más adelante (ejemplo 7.7).

7.4 Energía cinética

Vamos a calcular el trabajo total que hacen *todas* las fuerzas que actúan sobre un cuerpo originalmente en reposo. El trabajo que hace un pequeño desplazamiento en la misma dirección de la fuerza es

$$\Delta W = F_{\text{tot}}\Delta x, \qquad \Delta x \text{ peq.}$$

Ahora, utilizamos la segunda ley de Newton, $F_{\text{tot}} = ma$, pero sustituimos la aceleración instantánea por su definición

$$\Delta W = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta x, \qquad \Delta t \text{ peq.}$$

pero $\Delta x/\Delta t$ con Δt pequeño es la velocidad instantánea:

$$\Delta W = mv\Delta v, \qquad \Delta v \text{ peq.}$$

Para calcular el trabajo total vamos a graficar la función $f(v) = mv$, como en la fig. 7.10. Como vemos, $\Delta W = mv \cdot \Delta v$ es aproximadamente el área pequeña sombreada bajo la curva, por lo que el área total representa el trabajo total (área de un triángulo):

$$W_{\text{tot}} = \frac{mv \cdot v}{2} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.7}$$

Vamos a definir

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.8}$$

como la **energía cinética** (energía del movimiento). Si el cuerpo lleva inicialmente una velocidad v_A y termina con una velocidad v_B después de realizarse el trabajo desde A hasta B, el área bajo la curva es (fig. 7.11):

$$W_{\text{tot},AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A \tag{7.9}$$

Es decir que el trabajo total sobre un cuerpo causa un cambio en su energía cinética. A este enunciado se le llama *teorema del trabajo–energía cinética*.

A continuación, utilizaremos algunos de los problemas anteriores para aplicar el teorema trabajo–energía cinética.

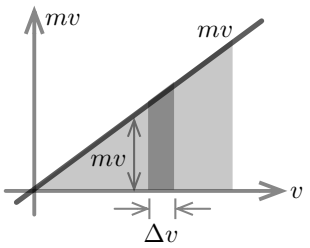


Figura 7.10: Energía cinética

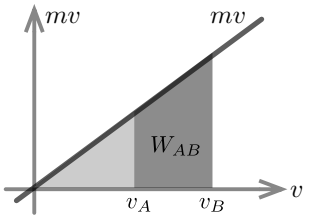


Figura 7.11: Diferencia de energías cinéticas

Ejemplo 7.5. *Arrastrar una maleta, II.*

En el ejemplo 7.1, si la pasajera comienza desde una rapidez de 0.4 m/s, calcule la rapidez que llevará la caja cuando se ha arrastrado por la distancia d.

Solución: Aplicamos el teorema del trabajo–energía cinética (que so-

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

lo se puede aplicar con el trabajo *total*):

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(W_{\text{tot}} + \frac{1}{2}mv_0^2\right)} = 2.44\,\text{m/s}$$

Ejemplo 7.6. *Elevador, II.*

En el ejemplo 7.2, calcule el trabajo que debe hacer el motor en cada tramo para que el elevador se mueva con rapidez constante.

Solución: Si no cambia la rapidez del elevador, su energía cinética no cambiará, por lo que $\Delta K = 0$. Por lo tanto, cuando sube del segundo al tercer piso, $W_{\text{tot}} = 0$:

$$W_{\text{tot}} = W_{23,\text{grav}} + W_{23,\text{motor}} = 0$$

$$\implies W_{23,\text{motor}} = -W_{23,\text{grav}} = +14\,700\,\text{J}$$

de igual forma, cuando baja desde el tercer piso al primero:

$$W_{31,\text{motor}} = -W_{31,\text{grav}} = -29\,400\,\text{J}$$

es decir, cuando el elevador sube, el motor debe vencer la gravedad, pero cuando baja, debe detener la caída libre. Para minimizar la cantidad de trabajo necesario, a los elevadores suele ponérseles un contrapeso.

Puntos claves

- Trabajo para pequeños desplazamientos: $\Delta W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$
- Trabajo para fuerzas constantes: $W = \vec{\mathbf{F}}_0 \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$
- Trabajo de la gravedad: $mg\Delta y$
- Trabajo de un resorte: $\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$
- Energía cinética: $K = \frac{1}{2}mv^2$
- Teorema del trabajo–energía cinética: $W_{AB} = K_B - K_A$

Ejemplo 7.7. *Trabajo de un resorte, II.*

En el ejemplo 7.4, suponga que $m = 0.4\,\text{kg}$, $k = 60\,\text{N/m}$, $\mu_k = 0.8$, y que la caja se desplazó en total $d = 0.5\,\text{m}$. a) Calcule la compresión inicial del resorte. b) Calcule la rapidez de la caja cuando se separó del resorte.

Solución: Llamemos A al punto inicial, B al punto donde la caja se separa del resorte y C al punto final, cuando la caja se detiene por la fricción. a) El trabajo total entre A y C lo habíamos calculado en el ejemplo 7.4, y dado que tanto en A como en C la rapidez es cero, $K_C - K_A = 0$:

$$W_{AC} = \frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgd = 0$$

$$\implies x = \sqrt{\frac{2}{k}\mu_k mgd} = 0.2\,\text{m}$$

b) Volvemos a aplicar el teorema de trabajo–energía cinética, pero esta vez entre los puntos A y B. El trabajo total en ese caso es $W_{AB} = \frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgx$, la rapidez en A es cero y la rapidez en B es lo que queremos encontrar:

$$\frac{1}{2}kx^2 - \mu_k mgx = \frac{1}{2}mv_B^2$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

$$\implies v_B = \sqrt{kx^2/m - 2\mu_k g x} = 1.7\,\mathrm{m/s}$$

Ejemplo 7.8. *Caída libre.*

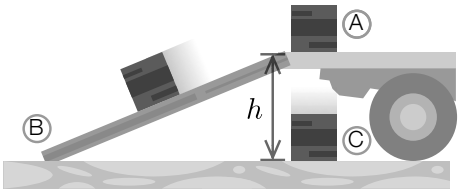
Una bola se lanza hacia arriba con rapidez inicial v_0. Calcule su rapidez cuando ha subido una distancia h.

Solución: Este problema podría hacerse perfectamente con cinemática, pero también puede resolverse con el teorema de trabajo–energía cinética, aplicándolo entre el punto inicial A y el punto B donde se alcanza la altura h:

$$W_{mg,AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \implies -mgh = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\implies v^2 = v_0^2 - 2gh$$

que es exactamente la ec. 2.5 aplicada a caída libre.



7.5 Energía potencial

Consideremos una caja subida en un camión, como está en la fig. 7.12, (A). Supongamos que se baja de dos formas, dejándola caer (C) o deslizándola sin fricción por un plano inclinado (B). ¿Cuál es el trabajo que hace la gravedad en cada caso? Primero que nada, como se ve en la figura, en el caso de la trayectoria AB, la normal no hace trabajo, pues en todo momento es perpendicular al desplazamiento. En el caso en el que la caja simplemente cae (AC), la gravedad hace un trabajo mgh. En el caso en el que la caja se desliza (AB), la gravedad hace un trabajo $mgL\cos\theta = mgh$, es decir, es el mismo: el trabajo que hace la gravedad para bajar una caja una altura h es el mismo independientemente de la trayectoria que se tome.

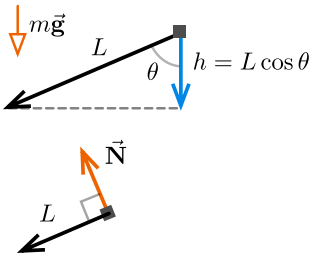
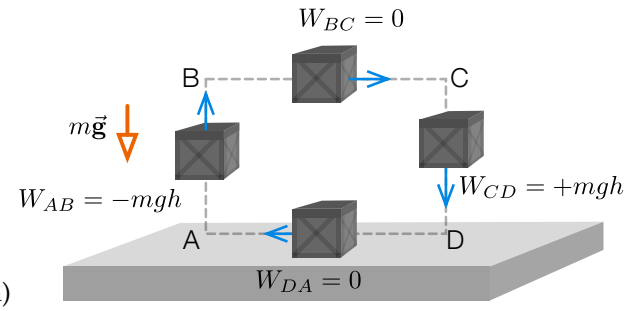


Figura 7.12: Trabajo de la gravedad en dos trayectorias distintas



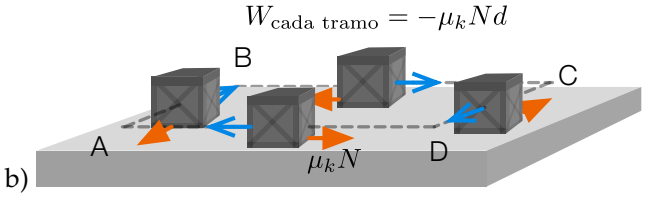


Figura 7.13: a) La gravedad como fuerza conservativa. b) La fricción como fuerza no conservativa

En la fig. 7.13a se muestra una caja que toma una trayectoria cerrada, es decir, que regresa al mismo punto desde donde partió. Observamos que el trabajo total que hace la gravedad en toda la trayectoria cerrada, $W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$, es cero. Una fuerza se llama **fuerza conservativa**, como lo es la gravedad o la fuerza elástica, cuando el trabajo que hace la misma en una trayectoria cerrada es cero. La fricción, en cambio, es una fuerza *no conservativa* pues (fig. 7.13b) el trabajo que hace siempre es negativo, y al completar una trayectoria cerrada, no da cero. Lo mismo podríamos decir de un motor o una persona empujando una caja: su trabajo total es positivo en una trayectoria cerrada.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Si y solo si tenemos una fuerza conservativa, podemos definir la **diferencia de energía potencial** U entre dos puntos A y B como el trabajo para ir desde A hasta B:

$$W_{AB} = U_A - U_B \tag{7.10}$$

Notemos el orden de los subíndices; es contario al de la ec. 7.9. Para la gravedad

$$W_{AB} = U_A - U_B = mgy_A - mgy_B$$

y para la fuerza elástica,

$$W_{AB} = U_A - U_B = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

También vamos a definir la **función energía potencial** (o simplemente *energía potencial*) a cada uno de esos términos: la energía potencial gravitacional (definiendo positivo hacia arriba)

$$U_{\text{grav}} = mgy \tag{7.11}$$

y la energía potencial elástica

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.12}$$

En esta última ecuación, hay que recordar que x es el estiramiento o compresión del resorte, y si nuestro marco de referencia no tiene $x = 0$ en el punto de equilibrio del resorte, la energía potencial es

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

donde Δx es el estiramiento o compresión del resorte.

En la fig. 7.14 mostramos un sistema masa–resorte colgado de un techo, que hace un movimiento armónico simple con amplitud A. La masa es m y la constante del resorte es k. Vamos a calcular la energía potencial en cada punto, Q, R y S, respecto a cada uno de los tres niveles mostrados en la figura. Los resultados para la energía potencial serán diferentes, pero demostraremos que el trabajo realizado será el mismo sin importar el nivel que elijamos como referencia. Escribimos los resultados en la tabla 7.1.

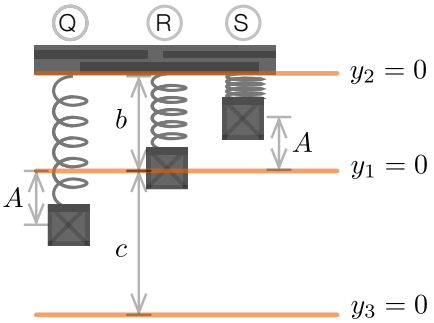


Figura 7.14: Energía potencial y marcos de referencia

	U_Q	U_R	U_S
y_1	$\frac{1}{2}kA^2 - mgA$	$0 + 0$	$\frac{1}{2}kA^2 + mgA$
y_2	$\frac{1}{2}kA^2 - mg(b + A)$	$0 - mgb$	$\frac{1}{2}kA^2 - mg(b - A)$
y_3	$\frac{1}{2}kA^2 + mg(c - A)$	$0 + mgc$	$\frac{1}{2}kA^2 + mg(c + A)$

Tabla 7.1: Cálculo de la energía potencial para la situación de la fig. 7.14

Entonces, si calculamos el trabajo W_{QR}, respecto a y_1

$$W_{QR} = U_Q - U_R = \frac{1}{2}kA^2 - mgA$$

y respecto a y_2,

$$W_{QR} = U_Q - U_R = \frac{1}{2}kA^2 - mg(b + A) - (-mgb) = \frac{1}{2}kA^2 - mgA$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

es decir, es lo mismo. Por otro lado, si calculamos el trabajo W_{QS} con y_3

$$W_{QS} = U_Q - U_S = \frac{1}{2}kA^2 + mg(c - A) - \frac{1}{2}kA^2 - mg(c + A) = -2mgA$$

y si lo calculamos respecto a y_1,

$$W_{QS} = U_Q - U_S = \frac{1}{2}kA^2 - mgA - \frac{1}{2}kA^2 - mgA = -2mgA$$

que es exactamente lo mismo.

7.6 Energía mecánica

Si sobre un cuerpo solamente actúan fuerzas conservativas, el trabajo total es igual a la diferencia de energía potencial:

$$W_{\text{tot},AB} = U_A - U_B$$

pero si además aplicamos el teorema de trabajo–energía cinética (ec. 7.9), tendremos

$$W_{AB} = U_A - U_B = K_B - K_A$$

reacomodando, obtenemos

$$U_A + K_A = U_B + K_B \tag{7.13}$$

Vamos a definir la **energía mecánica** E_{mec} como

$$E_{\text{mec}} = K + U$$

La ec. 7.13 nos dice que *la energía mecánica se conserva si en un cuerpo solo actúan fuerzas conservativas*, es decir,

$$E_{\text{mec},A} = E_{\text{mec},B} \qquad \text{(solo fuerzas conservativas)}$$

Si en un sistema actúan fuerzas no conservativas, como la fricción o la fuerza aplicada por un motor, la energía *mecánica* no se conserva, pero la energía *total* en todas sus formas sí se conserva, y en particular, todavía podemos aplicar la ec. 7.9 para resolver el problema. Las fuerzas no conservativas transforman energía mecánica en otros tipos de energía, u otros tipos de energía en energía mecánica. Cuando la energía mecánica se conserva, sin embargo, la solución de muchos problemas prácticos se vuelve aún más sencilla.

Puntos clave

- Fuerza conservativa: el trabajo hecho por esa fuerza en una trayectoria cerrada da cero.
- Diferencia de energía potencial: $W_{AB} = U_A - U_B$
- La energía potencial solo se puede definir con fuerzas conservativas.
- Energía potencial gravitacional: $U = mgy$
- Energía potencial elástica: $U = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es el estiramiento o compresión
- El nivel desde donde se mide la energía potencial es arbitrario.
- Energía mecánica: $E = K + U$
- La energía mecánica se conserva en un sistema si solo actúan fuerzas conservativas.

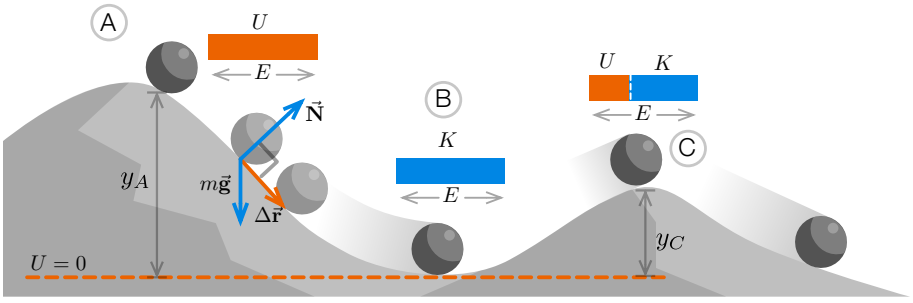


Figura 7.15: Bola que se desliza por dos colinas

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 7.9. *Bola que se desliza por dos colinas.*

Una bola de $m = 0.1\,\text{kg}$ se desliza sin fricción por dos colinas como se encuentra en la fig. 7.15. Si $y_A = 1\,\text{m}$, $y_C = 0.4\,\text{m}$ y la bola se suelta desde el reposo, calcule la rapidez en B y en C.

Solución: Elegimos el nivel de referencia en B, aprovechando que todas las alturas están medidas respecto a ese punto. Como se ve en la figura, la normal no hace trabajo, puesto que es siempre perpendicular al desplazamiento. Calculemos la energía mecánica en cada punto:

$$E_{\text{mec},A} = K_A + U_A = mgy_A$$

$$E_{\text{mec},B} = K_B + U_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$E_{\text{mec},C} = K_C + U_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C$$

En A, toda la energía mecánica es solamente energía potencial. En B, toda la energía potencial de A se transforma en energía cinética, y en C, parte de la energía cinética se vuelve a transformar en energía potencial. Para encontrar la rapidez en B, puesto que la energía mecánica se conserva, podemos igualar $E_{\text{mec},A} = E_{\text{mec},B}$

$$mgy_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \implies v_B = \sqrt{2gy_A} = 4.4\,\text{m/s}$$

ahora, para encontrar la rapidez en C podemos usar conservación de la energía tanto entre B y C como entre A y C (elegiremos la última):

$$mgy_A = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgy_C \implies v_C = \sqrt{2g(y_A - y_C)} = 3.4\,\text{m/s}$$

En un movimiento armónico simple, como se ve en la fig. 7.16, la energía mecánica se conserva. Cuando el resorte está estirado o comprimido totalmente, toda la energía mecánica existe en forma de energía potencial; en la posición de equilibrio toda esa energía potencial se ha convertido en cinética, por lo que es en esa posición donde la masa alcanza su máxima rapidez.

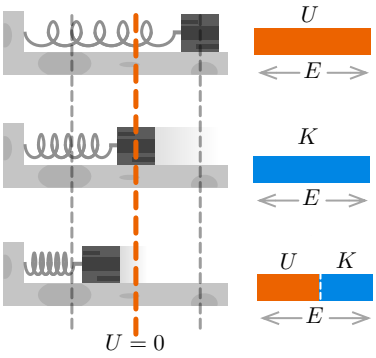


Figura 7.16: Energía mecánica en el movimiento armónico simple

Ejemplo 7.10. *Energía en el movimiento armónico simple.*

Una partícula de masa $m = 0.5\,\text{kg}$ está unida a un resorte de constante $k = 100\,\text{N/m}$, y hace un movimiento armónico simple de amplitud $a = 0.3\,\text{m}$. a) Calcule la rapidez máxima que alcanza la partícula. b) Calcule la rapidez de la partícula cuando el resorte está estirado 0.1 m

Solución: a) La energía mecánica cuando el resorte está estirado completamente (llamémosle punto A) es $E_{\text{mec},A} = \frac{1}{2}ka^2$, y cuando la partícula alcanza su rapidez máxima, en el punto de equilibrio del resorte, $E_{\text{mec},B} = \frac{1}{2}mv_B^2$. Al igualarlas, obtenemos

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 \implies v_B = a\sqrt{k/m} = 4.2\,\text{m/s}$$

b) Ahora, la energía mecánica cuando el resorte está estirado una

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

longitud de $x_C = 0.1\,\text{m}$ sería $E_{\text{mec},C} = \frac{1}{2}kx_C^2 + \frac{1}{2}mv_C^2$. Igualando esta con la energía en B:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}kx_C^2 + \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - kx_C^2/m} = 4.0\,\text{m/s}$$

Ejemplo 7.11. *Saltamontes.*

Las patas de un saltamontes pueden modelarse como un resorte de constante k (fig. 7.17). Un saltamontes de masa m comprime sus patas una distancia d y salta. Calcule: a) la altura máxima del salto, b) la rapidez máxima que alcanza durante el salto.

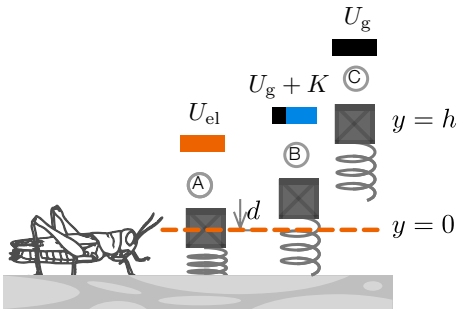


Figura 7.17: Saltamontes

Solución: Llamemos A al momento en el que el saltamontes se dispone a dar el salto, B cuando el saltamontes despega sus patas del suelo y C cuando alcanza su altura máxima. Vamos a definir el nivel de referencia como está en la figura. La energía mecánica en A es $E_{\text{mec},A} = \frac{1}{2}kd^2$. En B, el saltamontes ya se ha elevado una distancia d (resorte relajado) y ha adquirido una rapidez v_B, por lo que su energía mecánica es $E_{\text{mec},B} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgd$. Por último, en C, el saltamontes tiene una energía mecánica $E_{\text{mec},C} = mgh$.

a) Como la energía mecánica se conserva, igualamos la energía mecánica en A y C:

$$\frac{1}{2}kd^2 = mgh \implies h = \frac{kd^2}{2mg}$$

b) La rapidez máxima que alcanza durante el salto es la rapidez en B, cuando las patas se despegan del suelo. Esto es debido a que en este momento la energía potencial elástica se ha convertido en cinética, pero es antes de que la energía cinética se convierta totalmente en energía potencial gravitatoria (el resorte ya lo terminó de acelerar y la gravedad lo empieza a frenar). Entonces, igualamos la energía mecánica en A y B:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgd$$

$$\implies v_B = \sqrt{kd^2/m - 2gd}$$

Ejemplo 7.12. *Péndulo.*

Un péndulo como el de la fig. 7.18 está compuesto por una cuerda ideal de largo $L = 0.4\,\text{m}$ amarrada en el techo, y una partícula de masa $m = 0.5\,\text{kg}$. Si cuando la masa está en su posición más baja lleva una rapidez de $v_0 = 1.6\,\text{m/s}$, calcule el ángulo máximo que hace el péndulo con la vertical.

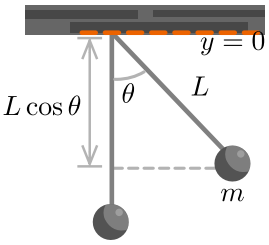


Figura 7.18: Péndulo

Solución: Vamos a definir $y = 0$ en el techo. Cuando el péndulo está en su posición más baja, $y = -L$ y su energía mecánica es $E_{\text{mec}} = -mgL + \frac{1}{2}mv_0^2$. El ángulo es máximo cuando el péndulo deja de subir, es decir, donde su rapidez se hace cero. En ese punto, $y = -L\cos\theta$,

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

y su energía mecánica es $E_{\text{mec}} = -mgL\cos\theta$. Igualando las energías mecánicas,

$$-mgL + \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgL\cos\theta$$

$$\implies \cos\theta = 1 - \frac{v_0^2}{2gL} = 0.673$$

$$\theta = \arccos(0.073) = 48^\circ$$

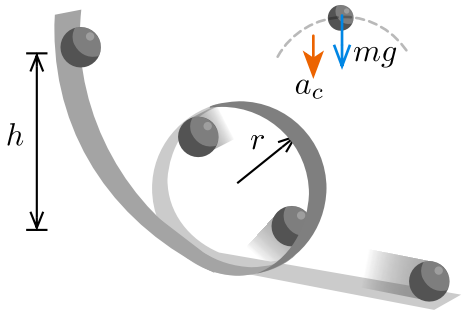


Figura 7.19: Bola en una pista

Ejemplo 7.13. *Bola en una pista.*

Una bola se suelta desde el reposo en una pista sin fricción con una forma parecida a la de una montaña rusa, con un bucle circular de radio r, como está en la fig. 7.19. a) Calcule la rapidez mínima para que la bola no se caiga en la parte más elevada del bucle circular. b) Calcule la altura mínima desde la que se debe soltar la bola para que no se caiga al pasar por el bucle.

Solución: a) En el bucle circular, la normal y una parte de la gravedad actúan como fuerza centrípeta. Sin embargo, si queremos la rapidez *mínima*, vamos a suponer que en la parte más elevada del bucle solamente la gravedad actúa como fuerza centrípeta, y que la normal es cero, es decir que hay el menor contacto posible con la pista. Entonces, recordando lo que sabemos de la §5.1, $mg = ma_c$, con lo que

$$mg = m\frac{v^2}{r} \implies v = \sqrt{gr}$$

b) La energía mecánica cuando se suelta la bola es $E = mgh$, y cuando se encuentra en la parte más elevada del bucle, es $E = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2r)$. Sustituyendo lo que encontramos en la parte (a), e igualando las energías, nos queda

$$mgh = \frac{1}{2}m(gr) + 2mgr \implies h = \frac{5}{2}r$$

7.7 Potencia

Vamos a definir **potencia** como energía por unidad de tiempo:

$$P = \frac{W}{t} \tag{7.14}$$

Las unidades de la potencia en el sistema internacional son Watts ($1\,\text{W} = 1\,\text{J/s}$).

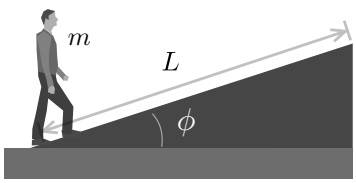


Figura 7.20: Persona subiendo escaleras

Ejemplo 7.14. *Prueba de esfuerzo en escaleras.*

Una persona de 70 kg tarda 1 min en subir unas escaleras de largo $L = 20\,\text{m}$ con un ángulo de $\phi = 30^\circ$ respecto a la horizontal (fig. 7.20). Estime su potencia.

Solución: Si la persona sube las escaleras con rapidez constante, su energía cinética no cambia, por lo que según el teorema de trabajo–

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

energía cinética, $W_{\text{tot}} = W_{\text{grav}} + W_{\text{pers}} = 0$, lo que significa que

$$W_{\text{pers}} = -W_{\text{grav}} = -(-mgh) = +mgh = mgL\sin\theta = 6860\,\text{J}$$

Dado que la persona subió las escaleras en $1\,\text{min} = 60\,\text{s}$, su potencia es

$$P = \frac{6860}{60} = 114\,\text{W}$$

Ejemplo 7.15. *Motor.*

¿Cuánto tiempo tardará un motor de 400 W para levantar una piedra de 1000 kg por una altura de 10 m con rapidez constante?

Solución: Si el motor levanta la piedra con rapidez constante, únicamente debe vencer la gravedad, es decir, debe hacer un trabajo de $W = mgy = 98\,000\,\text{J}$. El tiempo que tardará entonces será

$$t = \frac{W}{P} = 245\,\text{s} = 4\,\text{min}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

8 Moméntum, sistemas de partículas y equilibrio

8.1 Moméntum

En la primera parte de este capítulo estudiaremos el concepto de **moméntum** (también llamado en español *cantidad de movimiento*, *ímpetu* o *momento lineal*), muy relacionado con el concepto de fuerza. Definimos el moméntum como:

$$\textbf{moméntum} = m\vec{\mathbf{v}} \tag{8.1}$$

(Hemos preferido no utilizar ningún símbolo para el moméntum para evitar confusiones con símbolos usados en otros capítulos. Las letras en negritas indican que el moméntum es un vector). Una partícula que no se mueve no tiene moméntum. Durante un huracán (fig. 8.1), los vientos fuertes pueden arrastrar objetos pequeños (tablas, piedras, etc.) y convertirlos en proyectiles debido a que al aumentar su velocidad aumenta también su moméntum; al chocar contra un vehículo, persona o vivienda, estos objetos pueden causar mucho daño. Esta es una manera de interpretar el moméntum: de cierta forma nos da la idea del daño que podría causar un objeto en movimiento al colisionar.

Figura 8.1: Vientos fuertes de un huracán. [PD]

En la fig. 8.2a se ve un ciclista y un carro yendo a la misma velocidad. El carro tiene mayor moméntum por tener mayor masa; intuitivamente sabemos que si un peatón descuidado se encontrara con alguno de los dos, sufriría más daño al colisionar con el carro que con la bicicleta. Por otro lado, en la fig. 8.2b tenemos un carro de 1000 kg que se mueve a $1\,\mathrm{km/h} = +0.3\,\mathrm{m/s}$, es decir que su moméntum es de $1000 \times 0.3 = 300\,\mathrm{kg\,m/s}$. En caso de choque, causaría un daño parecido al de una bala de 1 kg que se mueva con una velocidad de $+300\,\mathrm{m/s}$, pues su moméntum también es de $300\,\mathrm{kg\,m/s}$.

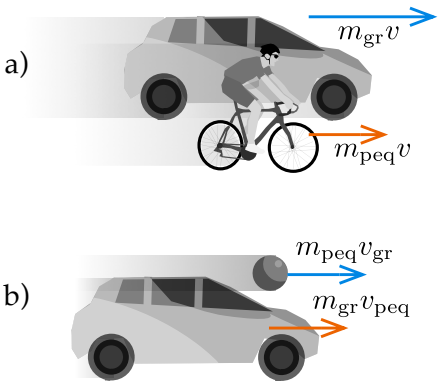


Figura 8.2: a) Moméntum de un carro y un ciclista b) Moméntum de un carro y de una bala

En la fig. 8.3 se muestra un futbolista pateando una bola. El moméntum inicial de la bola es $m\vec{\mathbf{v}}_i$, y luego de la patada, tiene un moméntum de $m\vec{\mathbf{v}}_f$. Para cambiar el moméntum de la bola, el futbolista tuvo que aplicar una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ por un pequeño instante Δt. Esto nos dice que *para cambiar el moméntum se necesita una fuerza*.

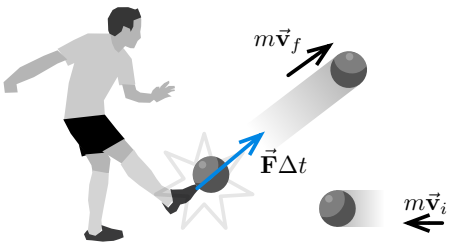


Figura 8.3: Fuerza ejercida por un futbolista sobre una bola

En la §4.3 estudiamos la segunda ley de Newton para partículas de masa constante. En general la segunda ley de Newton se puede enunciar en términos del moméntum, y de esta forma es válida tanto para partículas de masa constante como variable:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{\Delta(\textbf{moméntum})}{\Delta t} = \frac{m_f\vec{\mathbf{v}}_f - m_i\vec{\mathbf{v}}_i}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ peq.} \tag{8.2}$$

(hemos omitido el subíndice de suma). Si la partícula tiene masa cons-

tante, $m_i = m_f = m$ y entonces

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{m\vec{\mathbf{v}}_f - m\vec{\mathbf{v}}_i}{\Delta t} = m\frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = m\vec{\mathbf{a}}$$

es decir, recuperamos la ec. 4.1.

Ejemplo 8.1. *Futbolista.*

El futbolista de la fig. 8.3 patea una bola de masa $m = 0.4\,\text{kg}$ que inicialmente tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i = -2\,\text{m/s}\,\hat{\mathbf{x}}$. La bola sale disparada con una velocidad final de $\vec{\mathbf{v}}_f = (+5\,\hat{\mathbf{x}} + 8\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{m/s}$. Si el futbolista tocó la bola por aproximadamente 0.07 s, calcule: a) el cambio de momentum que experimentó la bola y b) la fuerza promedio aproximada que hizo el futbolista.

Solución: El cambio de momentum fue

$$m\vec{\mathbf{v}}_f - m\vec{\mathbf{v}}_i = 0.4 \cdot 5\,\hat{\mathbf{x}} + 0.4 \cdot 8\,\hat{\mathbf{y}} - 0.4 \cdot -2\,\hat{\mathbf{x}} = (2.8\,\hat{\mathbf{x}} + 3.2\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{kg m/s}$$

Por lo que la fuerza promedio será

$$\bar{\vec{\mathbf{F}}} = \frac{2.8\,\hat{\mathbf{x}} + 3.2\,\hat{\mathbf{y}}}{0.07} = (40.0\,\hat{\mathbf{x}} + 45.7\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{N}$$

8.2 Colisiones

Durante una colisión, se ejerce una fuerza para cambiar el momentum de los cuerpos involucrados, durante un pequeño tiempo Δt, como lo vimos en la sección anterior. Debido a la tercera ley de Newton, si uno de los cuerpos ejerce una fuerza en un segundo cuerpo, el primero ejercerá la misma fuerza pero en dirección contraria (fig. 8.4b). Entonces, si hacemos una suma de fuerzas de *todo el sistema*, obtendremos

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_{21} = \vec{\mathbf{F}}_{12} - \vec{\mathbf{F}}_{12} = \vec{\mathbf{0}}$$

pero también, utilizando la ec. 8.2,

$$\vec{\mathbf{0}} = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} - m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i}}{\Delta t} + \frac{m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f} - m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i}}{\Delta t}$$

o, reacomodando,

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f} \tag{8.3}$$

es decir, *en ausencia de fuerzas externas*, el momentum *total* de un sistema se conserva. Observemos que el momentum individual de cada partícula no se conserva, solamente lo hace el momentum total.

Ahora supongamos que en la fig. 8.4a, la partícula 1 tiene una masa $m_1 = 2\,\text{kg}$ y se mueve inicialmente con una velocidad $v_{1ix} = +3\,\text{m/s}$, y la otra, de masa $m_2 = 1\,\text{kg}$, se mueve con velocidad $v_{2ix} = -2\,\text{m/s}$ (hemos llamado x positivo hacia la derecha). Al final de la colisión (fig. 8.4c), la partícula 1 queda con una velocidad $v_{1fx} = -0.1\,\text{m/s}$. Ahora, utilicemos la conservación del momentum total en x para calcular la velocidad final de la partícula 2:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

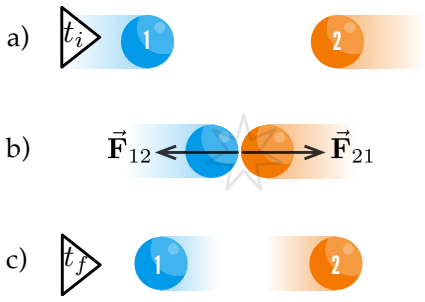


Figura 8.4: Colisión

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

$$v_{2fx} = \frac{m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} - m_1 v_{1fx}}{m_2} = +4.2\,\mathrm{m/s}$$

Ahora, calculemos la energía cinética inicial y final del sistema:

$$K_i = K_{1i} + K_{2i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = 11\,\mathrm{J}$$

$$K_f = K_{1f} + K_{2f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = 8.8\,\mathrm{J}$$

es decir que la energía cinética disminuyó durante el choque. Lo que ocurre es que esa energía faltante se transformó en otros tipos de energía como calor o sonido.

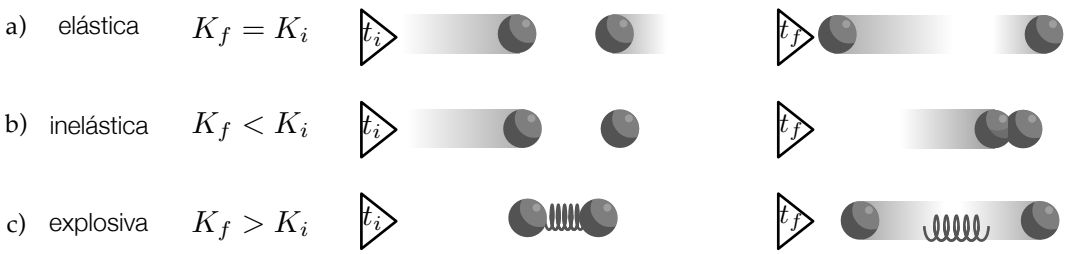


Figura 8.5: Tipos de colisiones

Las colisiones pueden clasificarse en tres tipos, según lo que ocurra con la energía cinética del sistema, en *elásticas*, *inelásticas* y *explosivas*, de acuerdo con la fig. 8.5. Según esta clasificación, la colisión que hemos resuelto ha sido inelástica.

En las colisiones inelásticas y explosivas, la energía cinética no se conserva, por lo que *durante* la colisión solo contamos con la ec. 8.3. No obstante, en las colisiones elásticas, contamos también con la conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{8.4}$$

donde las v son *magnitudes* de los vectores velocidad.

Puntos clave

- Moméntum $= m\vec{\mathbf{v}}$
- Segunda ley de Newton general: $\sum \vec{\mathbf{F}} = \Delta(m\vec{\mathbf{v}})/\Delta t$, con Δt peq.
- Conservación del moméntum: si no hay fuerzas externas, el moméntum *total* inicial es igual al moméntum *total* final.
- Colisiones:
  - Elásticas: se conserva la energía cinética y el moméntum
  - Inelásticas: solo se conserva el moméntum (la energía cinética disminuye)
  - Explosivas: solo se conserva el moméntum (la energía cinética aumenta)

Ejemplo 8.2. *Bolas de masa.*

En una panadería, una bola de masa para hacer pizza es lanzada con velocidad v_0 hacia otra de masa tres veces menor, originalmente en reposo (ver fig. 8.5b). Después de la colisión, que es inelástica, ambas bolas se pegan y se mantienen juntas. Calcule su velocidad final.

Solución: La masa de la bola en reposo es m, y la de la que llega a golpearla es $3m$. Al final, dado que ambas bolas se pegan, tienen la misma velocidad. Aplicamos conservación del moméntum:

$$3mv_0 = 3mv + mv \implies 3v_0 = 4v \implies v = \frac{3}{4} v_0$$

Ejemplo 8.3. *Colisión explosiva.*

En la fig. 8.5c se muestran dos bolas de igual masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ y un resorte de constante $k = 50\,\mathrm{N/m}$, comprimido una distancia $d = 0.2\,\mathrm{m}$. Calcule la velocidad de ambas bolas al soltarse el resorte.

Solución: En esta colisión, la energía *cinética* por sí sola no se conser-

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

va, pero sí la energía *mecánica total*, puesto que actúa solo la fuerza elástica. Primero, apliquemos conservación del moméntum:

$$0 = mv_{1fx} + mv_{2fx} \implies v_{1fx} = -v_{2fx} = v$$

es decir, ambas bolas tienen la misma rapidez pero salen disparadas en direcciones contrarias. Ahora aplicamos conservación de la energía *mecánica*:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} = 1.4\,\mathrm{m/s}$$

con lo que $v_{1fx} = +1.4\,\mathrm{m/s}$ y $v_{2fx} = -1.4\,\mathrm{m/s}$.

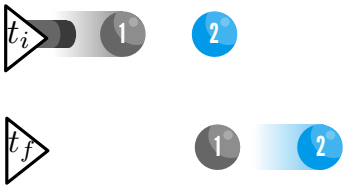


Figura 8.6: Billar

Ejemplo 8.4. *Billar.*

Las bolas de billar colisionan de forma aproximadamente elástica (fig. 8.6). Una bola de billar se encuentra en la mesa, en reposo, cuando otra bola idéntica llega a $4\,\mathrm{m/s}$. Calcule las velocidades finales de ambas bolas.

Solución: Como las bolas colisionan elásticamente, el moméntum y la energía cinética se conservan:

$$\begin{cases} m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \end{cases}$$

Para simplificar el álgebra, llamemos v a la velocidad final de la bola 1 y u a la velocidad final de la bola 2. Las bolas son idénticas, por lo que sus masas son iguales y se cancelarán a ambos lados de las ecuaciones. Entonces:

$$\begin{cases} 4 = v + u \\ 16 = v^2 + u^2 \end{cases}$$

De la primera ecuación, $u = 4 - v$, con lo que, sustituyendo en la segunda ecuación,

$$16 = v^2 + (4-v)^2 \implies 16 = v^2 + 16 - 8v + v^2$$

$$\implies 2v^2 - 8v = 0$$

con lo cual o bien $v = 4 = v_{1fx}$, o bien $v = 0 = v_{1fx}$. Si tomamos la primera opción, y sustituimos en la primera ecuación, tenemos que $u = 0 = v_{2fx}$. Esto no puede ser, puesto que significaría que la bola 1 atraviesa la bola 2 (como si fuera un fantasma) mientras que la bola 2 queda en reposo. Por lo tanto, la opción correcta es

$$v = v_{1fx} = 0$$

con lo que

$$u = 4 - v = v_{2fx} = 4\,\mathrm{m/s}$$

es decir, al colisionar las bolas de billar "intercambian velocidades".

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 8.5. *Análisis de choque de tránsito.*

Un carro de masa $m_2 = 1000\,\text{kg}$ frena súbitamente, de forma que su velocidad se reduce a $v_{2ix} = 3\,\text{m/s}$, cuando un carro de $m_1 = 1700\,\text{kg}$ no logra detenerse a tiempo y lo colisiona. Al final de la colisión, el carro 1 redujo su velocidad a $v_{1fx} = 4\,\text{m/s}$, y el carro 2 salió expulsado a $v_{2fx} = 6\,\text{m/s}$. Despreciando el efecto de los frenos, calcule la velocidad con la que venía el carro 1.

Solución: Utilizando conservación del moméntum, $v_{1ix} = (m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} - m_2 v_{2ix})/m_1 = 5.8\,\text{m/s}$

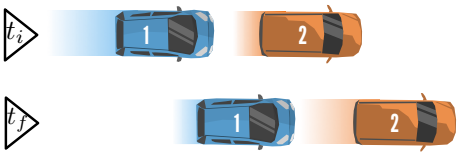


Figura 8.7: Análisis de choque de tránsito

Cuando tenemos colisiones en más de una dimensión, debemos separar la ec. 8.3 en cada componente.

Ejemplo 8.6. *Reflexión.*

En la fig. 8.8 se muestra una bola que rebota elásticamente contra el suelo con un ángulo inicial θ_i y una velocidad inicial v_i. a) Demuestre que la rapidez final es igual a la inicial. b) Demuestre que el ángulo final es igual al inicial. c) Calcule la fuerza promedio que hace la normal $\vec{\mathbf{N}}$ mientras dura el choque (Δt)

Solución: a) De la conservación de la energía cinética, podemos escribir

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_i = v_f = v$$

b) ahora aplicamos conservación del moméntum en x:

$$mv\sin\theta_i = mv\sin\theta_f \implies \sin\theta_i = \sin\theta_f \implies \theta_i = \theta_f$$

c) En y, no se conserva el moméntum, pero podemos aplicar la ec. 8.2 para encontrar la fuerza:

$$N = \frac{mv\cos\theta - (-mv\cos\theta)}{\Delta t} = \frac{2mv\cos\theta}{\Delta t}$$

Esta es la fuerza que origina la presión en fluidos (§6.5).

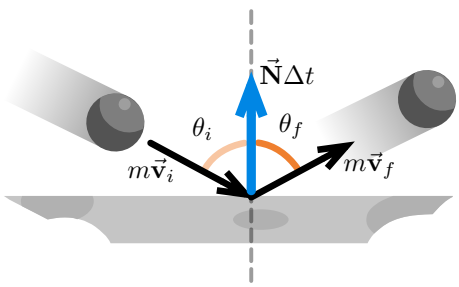


Figura 8.8: Reflexión

8.3 Sistemas de partículas: centro de masa

Hasta el momento hemos estudiado partículas individuales. En el resto de este capítulo, estudiaremos lo que ocurre cuando tenemos sistemas (grupos) de partículas. Para ello, vamos a introducir el concepto de **centro de masa**: es una posición que representa a un sistema de partículas. En la fig. 8.9a tenemos dos estrellas de la misma masa separadas por una cierta distancia. De cierta forma, intuitivamente podríamos pensar en que el punto que "representa" mejor al sistema se encuentra a medio camino entre ambas estrellas, puesto que son iguales y ese punto está a la misma distancia de ambas. Si, en cambio, una estrella tiene más masa que la otra (fig. 8.9b), esperamos que ese punto se encuentre más cerca de la estrella más masiva, puesto que de ese lado está la mayoría de masa del sistema. Vamos a calcular el centro de masa de un sistema

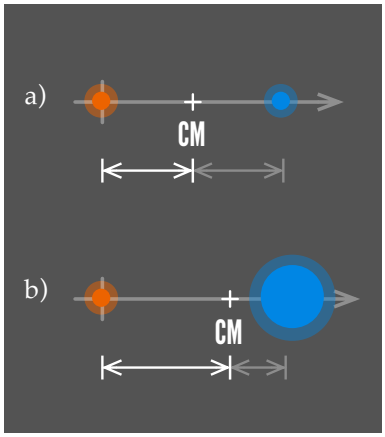


Figura 8.9: a) Centro de masa de dos estrellas de la misma masa. b) Centro de masa de dos estrellas donde la segunda es de más masa que la primera.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

con la ecuación

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \tag{8.5}$$

donde M es la masa total del sistema (suma de las masas que lo conforman), m_i son las masas de cada partícula y $\vec{\mathbf{r}}_i$ son las posiciones de cada partícula, y el subíndice i, significa $i = 1, 2, 3, 4, ...$ Hay que recordar que la suma es *vectorial*, es decir que se puede separar por componentes y escribir

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$$

Un cuerpo **sólido rígido** está compuesto por infinidad de partículas, todas a una distancia fija entre sí (si la distancia cambiara, sería un sólido deformable). El centro de masa de un sólido rígido, siempre y cuando la masa esté uniformemente distribuida en él, se encuentra en su centro geométrico, como se encuentra en la fig. 8.10. Además, como se observa en el caso del aro, el centro de masa puede estar fuera del cuerpo, donde no hay masa.

Si necesitamos calcular el centro de masa de varios cuerpos sólidos rígidos, podemos calcular primero el centro de masa de cada uno y después sumarlos juntos utilizando la ec. 8.5.

Una de las grandes utilidades del centro de masa de un cuerpo sólido rígido es que nos permite representarlo por una partícula ubicada en esa posición. Por ejemplo, consideremos un tenista que lanza molesto su raqueta, como se observa en la fig. 8.11. La raqueta rota mientras vuela en un movimiento complicado por el aire, pero su centro de masa se mueve como lo estudiamos en la §3.8, es decir, en forma de parábola, sujeto a las mismas ecuaciones que ya estudiamos, es decir,

$$a_{CM,y} = -g \implies y_{CM} = y_{CM,0} + v_{CM,0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

donde $v_{CM,y}$ es la velocidad del centro de masa, y $a_C M$, su aceleración.

Ejemplo 8.7. *Estrellas.*

Dos estrellas, una del triple de la masa de la otra, están separadas por una distancia d (fig. 8.12). Calcule la distancia al centro de masa desde la estrella de menor masa.

Solución: Ponemos el marco de referencia como está en la fig. 8.12. Vamos a aplicar simplemente la componente en x de la ec. 8.5, con $m_1 = M$, $m_2 = 3M$, $x_1 = 0$, $x_2 = d$:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{M \cdot 0 + 3Md}{4M} = \frac{3Md}{4M} = \frac{3}{4}d$$

Observe que las unidades de masa siempre se van a cancelar, pues el centro de masa tiene unidades de longitud. Además, veamos que el centro de masa, efectivamente se encuentra más cerca de la estrella más masiva.

Puntos clave

- Centro de masa: posición que representa al sistema de partículas
- $\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$
- Sólido rígido: sistema de partículas donde las distancias relativas no cambian
- Centro de masa de un sólido rígido con densidad uniforme: en su centro geométrico
- Centro de masa de varios sólidos rígidos: se saca el centro de masa de cada uno y después se tratan como partículas

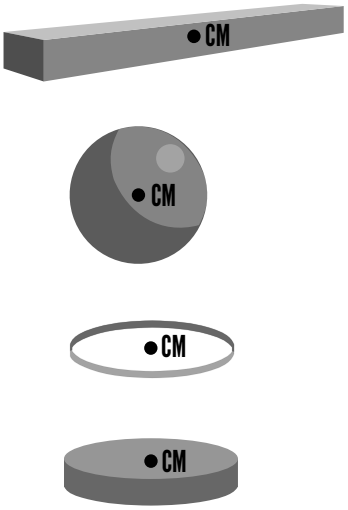


Figura 8.10: Centro de masa de sólidos

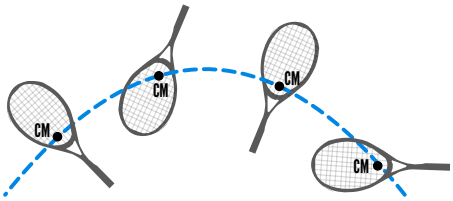


Figura 8.11: Trayectoria parabólica del centro de masa

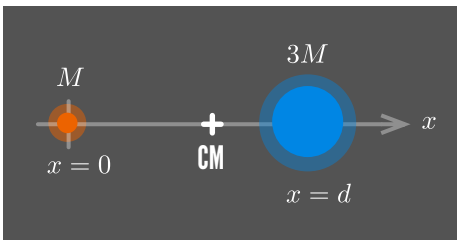


Figura 8.12: Centro de masa de dos estrellas

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 8.8. *Centro de masa de una pierna flexionada.*

Una pierna se puede modelar como dos barras (una para el muslo y la otra para la pantorrilla) y una partícula (para el pie), cuyas longitudes y masas proporcionales se encuentran en la fig. 8.13, es decir, L es la altura total de la persona, y M es la masa total de la persona. Calcule el centro de masa, respecto a la rodilla, de una pierna flexionada en un ángulo de 90° para una persona de 1.70 m de alto.

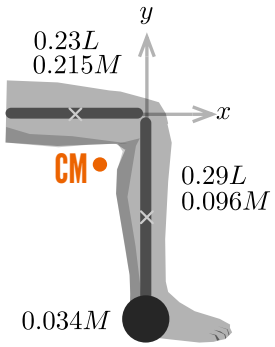


Figura 8.13: Centro de masa de una pierna flexionada

Solución: El problema es bidimensional (hay que utilizar vectores), y contiene dos barras, que son sólidos rígidos, por lo que su centro de masa está en su centro geométrico (la mitad de su longitud). Así, la posición del centro de masa del muslo está en

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{mus}} = -\frac{0.23L}{2}\,\hat{\mathbf{x}} = -0.2\,\text{m}\,\hat{\mathbf{x}}$$

la de la pantorrilla, en

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{pan}} = -\frac{0.29L}{2}\,\hat{\mathbf{y}} = -0.25\,\text{m}\,\hat{\mathbf{y}}$$

y la posición del pie es $\vec{\mathbf{r}}_{\text{pie}} = -0.49\,\text{m}\,\hat{\mathbf{y}}$. Con esto, la posición del centro de masa de todo el sistema es

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{m_{\text{mus}}\vec{\mathbf{r}}_{\text{mus}} + m_{\text{pan}}\vec{\mathbf{r}}_{\text{pan}} + m_{\text{pie}}\vec{\mathbf{r}}_{\text{pie}}}{m_{\text{mus}} + m_{\text{pan}} + m_{\text{pie}}}$$

$$= \frac{-0.20\cdot 0.215M\,\hat{\mathbf{x}} - 0.25\cdot 0.096M\,\hat{\mathbf{y}} - 0.49\cdot 0.034M\,\hat{\mathbf{y}}}{0.345M}$$

$$= (-0.125\,\hat{\mathbf{x}} - 0.118\,\hat{\mathbf{y}})\,\text{m}$$

lo cual es fuera de la pierna, como está en la fig. 8.13. Observe que M se cancela.

8.4 Torque

Cuando aplicamos una fuerza en una partícula, solo hay un punto posible donde se puede aplicar. En cambio, cuando tenemos cuerpos sólidos rígidos, como una silla, por ejemplo, hay muchos puntos donde puede aplicarse la fuerza (en una de las patas, o en el asiento, el respaldo, etc.). El **torque** es una cantidad física que describe cómo una fuerza es aplicada en un punto de un objeto (fig. 8.14), y está definida como

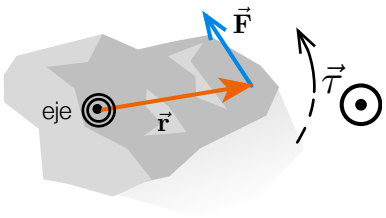


Figura 8.14: Torque

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \tag{8.6}$$

En cuerpos desprovistos de fuerzas, la aplicación de un torque causa que se inicie una rotación alrededor de un **eje**.

En la fig. 8.15a se muestra un sólido rígido el cual no tiene fuerzas aplicadas. Por lo tanto, la ec. 8.6 nos daría que el torque debe ser el vector nulo $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}}$. Sin embargo, esta no es la única situación en la que el torque es el vector nulo: considere una partícula Δm que forma un sólido rígido, como en la fig. 8.15b. Junto con todo el sólido, esta partícula rota en un movimiento circular uniforme, con velocidad angular constante ω. Entonces, la partícula Δm debe experimentar una fuerza

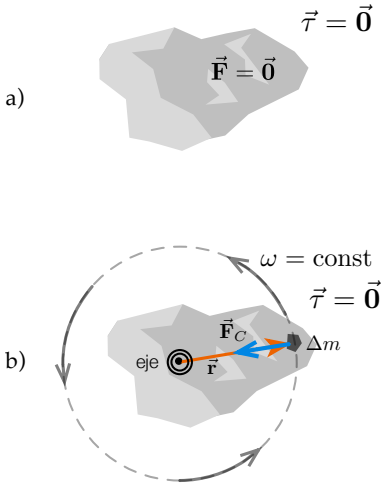


Figura 8.15: a) Sólido rígido desprovisto de fuerzas. b) Sólido rotando con velocidad angular constante.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

centrípeta, que la ejercen las moléculas del sólido entre sí como fuerza de cohesión. Sin embargo, observamos que esta fuerza centrípeta es siempre antiparalela al vector $\vec{\mathbf{r}}$, medido respecto al eje. Entonces, $\tau = rF\sin 180^\circ = 0$, por lo que $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}}$. Por lo tanto, vamos a definir el concepto de **equilibrio rotacional** como una situación donde el torque se anule, es decir, que puede ocurrir cuando el cuerpo no rota o cuando el cuerpo rota con velocidad angular constante. Por ende, lo que hace un torque es *cambiar la velocidad angular* del un sólido rígido. Es decir, un cuerpo necesita un torque para empezar o parar una rotación, pero no para mantenerse en ella.

Regresando al torque como fuerza aplicada en un punto, ¿en cuál punto se aplica la gravedad de un sólido rígido? En un campo gravitacional uniforme, *la gravedad se aplica en el centro de masa*, por lo que conocer el centro de masa de un sólido se vuelve importante para calcular el torque de la gravedad.

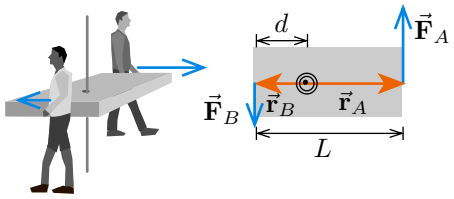


Figura 8.16: Trabajadores rotando una tabla

Ejemplo 8.9. *Trabajadores rotando una tabla.*

Dos trabajadores rotan una tabla que tiene un agujero por donde pasa una barra (eje de rotación), como se ilustra en la fig. 8.16. Uno de los trabajadores empuja con fuerza de magnitud $F_A = 60\,\text{N}$, y el otro, con una fuerza de magnitud $F_B = 40\,\text{N}$. El eje de rotación se encuentra a una distancia $d = 1\,\text{m}$ del trabajador B, y la longitud de la tabla es $L = 3\,\text{m}$. Calcule el torque total sobre la tabla.

Solución: Elijamos el plano de la tabla como el plano xy. El torque que hace el trabajador A es

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_A = \vec{\mathbf{r}}_A \times \vec{\mathbf{F}}_A = +(L-d)F_A \sin 90^\circ\,\hat{\mathbf{z}} = (3-1)\cdot 60\,\hat{\mathbf{z}} = 120\,\text{N m}\,\hat{\mathbf{z}}$$

por otro lado, el torque que hace el trabajador B es

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_B = \vec{\mathbf{r}}_B \times \vec{\mathbf{F}}_B = +dF_B \sin 90^\circ\,\hat{\mathbf{z}} = 1\cdot 40\,\hat{\mathbf{z}} = 40\,\text{N m}\,\hat{\mathbf{z}}$$

8.5 Equilibrio

Vamos a decir que un cuerpo se encuentra en **equilibrio** si:

- La suma de fuerzas da cero: $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{0}}$
- La suma de torques da cero: $\sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i = \vec{\mathbf{0}}$

Vamos a utilizar esta condición para resolver varios problemas en donde el objetivo es determinar las condiciones para que un cuerpo permanezca en equilibrio. Para facilitar la suma de torques, recordemos que si los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ se encuentran en el plano xy, el torque solo puede tener componente en z. La regla de la mano derecha nos permitirá encontrar el signo, es decir, si el torque va en $+\hat{\mathbf{z}}$ o $-\hat{\mathbf{z}}$. Entonces, en componentes, si el cuerpo se encuentra en el plano xy,

$$\begin{cases} \sum_i F_{i,x} = 0 \\ \sum_i F_{i,y} = 0 \\ \sum_i \tau_{i,z} = 0 \end{cases}$$

En el caso de equilibrio, obviamente no hay un eje de rotación. Entonces, ¿desde dónde se mide el vector $\vec{\mathbf{r}}$ para calcular el torque? La

Puntos clave

- Torque: $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$
- La gravedad se aplica en el centro de masa
- Equilibrio rotacional: si no hay torques netos, es decir, $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}}$. Puede ocurrir si el cuerpo rota con velocidad angular constante o si está en reposo.
- Equilibrio: $\sum \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$; $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{0}}$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

respuesta es que se puede medir respecto a *cualquier punto* Q, y el resultado debe dar igual.

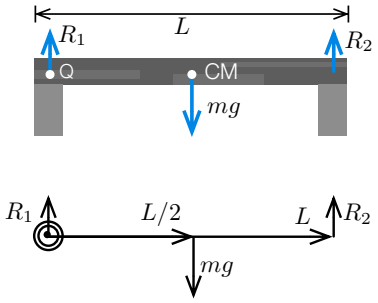


Figura 8.17: Mesa

Ejemplo 8.10. *Mesa.*

En la fig. 8.17 se muestra una mesa de largo L y masa m, que está siendo sostenida por dos patas ubicadas en las orillas, que le hacen una reacción R_1 y R_2, respectivamente. Calcule esas reacciones.

Solución: Vamos a elegir el punto Q en la pata izquierda (podríamos haberlo elegido en cualquier otro punto). Observemos que, alrededor de Q, R_1 no hace torque, puesto que $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$. Primero vamos a hacer suma de torques en z:

$$\sum \tau_z = 0 \implies -mg \cdot \frac{L}{2} \sin 90^\circ + R_2 L \sin 90^\circ = 0$$

$$R_2 L = \frac{mgL}{2} \implies R_2 = \frac{mg}{2}$$

Ahora, hacemos suma de fuerzas en y, y sustituimos R_2 por lo que acabamos de encontrar

$$R_1 + R_2 - mg = 0 \implies R_1 + \frac{mg}{2} - mg = 0$$

$$\implies R_1 = \frac{mg}{2} = R_2$$

es decir, cada pata debe aguantar la mitad de la gravedad de la mesa.

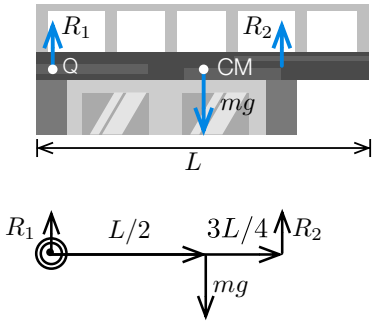


Figura 8.18: Casa con terraza

Ejemplo 8.11. *Casa con terraza.*

En la fig. 8.18 se muestra una casa que tiene una pequeña terraza, que ocupa $1/4$ del tamaño del techo. La situación en realidad es idéntica a la del ejemplo anterior, pero una columna está movida hacia adentro, a $3L/4$ del punto Q, elegido en la columna de la izquierda. Calcule las reacciones de las columnas.

Solución: Recordando que R_1 no hace torque porque $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$, y fijándonos que todos los ángulos son de 90° por lo que $\sin\theta = 1$, vamos a hacer una suma de torques en z:

$$-mg\frac{L}{2} + R_2\frac{3L}{4} = 0$$

$$\implies \frac{3R_2}{4} = \frac{mg}{2} \implies R_2 = \frac{2mg}{3}$$

Ahora, hacemos suma de fuerzas en y:

$$R_1 + R_2 - mg = 0 \implies R_1 + \frac{2mg}{3} - mg = 0 \implies R_1 = \frac{mg}{3}$$

con lo que ahora las reacciones de las columnas no son iguales; la de la derecha debe hacer más esfuerzo para soportar el techo. Una consecuencia de esto es que si moviéramos la columna de la derecha a exactamente la mitad del techo, esta soportaría toda la gravedad del mismo, y la columna de la izquierda no soportaría ninguna carga. Y si ponemos ambas columnas en la mitad izquierda del techo, de

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

forma que el centro de masa quede en el aire, el techo simplemente se cae, pues no hay forma de mantener el equilibrio.

Ejemplo 8.12. *Palanca.*

Una palanca se utiliza para mover una piedra de masa $m = 100\,\text{kg}$, como se encuentra en la fig. 8.19. La palanca tiene un largo $L = 2\,\text{m}$, y la piedra está ubicada a una distancia $d = 0.4\,\text{m}$ del punto de apoyo. Calcule la magnitud de la fuerza F mínima para mover la piedra.

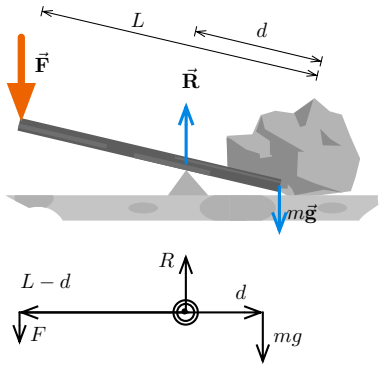


Figura 8.19: Palanca

Solución: La fuerza mínima se calcula con la situación de equilibrio. Para facilitar el cálculo, vamos a considerar el caso en el que la palanca se encuentra en posición horizontal. Observemos que hay una fuerza $\vec{\mathbf{R}}$, la reacción del punto de apoyo de la palanca, pero en ningún momento en el enunciado nos interesa calcularla. Eso nos da la idea de elegir el punto Q justo en el punto de apoyo, para que $\vec{\mathbf{R}}$ no haga torque, porque $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$. Entonces, haciendo la suma de torques en el punto de apoyo,

$$+(L-d)F - dmg = 0 \implies F = \frac{dmg}{L-d} = \frac{0.4 \cdot 100 \cdot 9.8}{2 - 0.4} = 245\,\text{N}$$

cuando la gravedad de la piedra es $mg = 980\,\text{N}$, por lo que el esfuerzo que hay que hacer se reduce. Esta es la utilidad de las palancas, y también el mismo procedimiento se puede aplicar a otras herramientas, como llaves de tuercas o tenazas.

Ejemplo 8.13. *Rótulo colgante.*

En la fig. 8.20 se muestra un rótulo que cuelga de una pared mediante una barra y un cable. Si $L = 1\,\text{m}$, $d = 0.8\,\text{m}$, $\theta = 30°$, la masa de la barra es $M = 1.4\,\text{kg}$ y la del rótulo es $m = 0.5\,\text{kg}$, calcule la tensión del cable y las fuerzas de reacción y fricción con la pared.

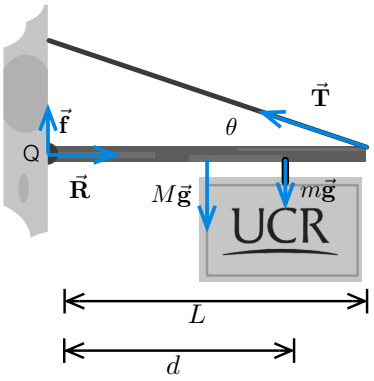


Figura 8.20: Rótulo colgante

Solución: Primero vamos a hacer suma de torques en z, y vamos a elegir el punto Q en el extremo izquierdo de la barra, para no contar las fuerzas $\vec{\mathbf{f}}$ ni $\vec{\mathbf{R}}$:

$$TL\sin\theta - Mg\frac{L}{2} - mgd = 0$$

despejamos T:

$$T = \frac{MgL/2 + mgd}{L\sin\theta} = \frac{1.4 \cdot 9.8 \cdot 1/2 + 0.5 \cdot 9.8 \cdot 0.8}{1 \cdot \sin 30°} = 21.56\,\text{N}$$

Ahora, suma de fuerzas en y:

$$f - Mg - mg + T\sin\theta = 0$$

despejamos f

$$\implies f = Mg + mg - T\sin\theta = 7.84\,\text{N}$$

Por último, hacemos suma de fuerzas en x:

$$R - T\cos\theta = 0 \implies R = T\cos\theta = 18.58\,\text{N}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

9 Energía eléctrica y térmica

9.1 Energía eléctrica y su conducción

Puntos clave

- Corriente eléctrica: $I = q/t$
- Voltaje: $\Delta V = W/q$
- Potencia eléctrica: $P = I\Delta V$
- Ley de Ohm: $\Delta V_{\text{resistor}} = IR$

En la primera parte de este capítulo, estudiaremos el movimiento de las cargas eléctricas a través de un metal, y sus aplicaciones prácticas en la forma de circuitos eléctricos.

Habíamos definido en la §6.3 la *corriente eléctrica* como cargas eléctricas moviéndose:

$$I = \frac{q}{t}$$

Vamos a definir el **voltaje** (también llamado *tensión eléctrica* o *diferencia de potencial*) como energía potencial eléctrica (o trabajo) por unidad de carga provocado al mover una carga utilizando un campo eléctrico:

$$\Delta V = \frac{W}{q} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}}{q} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} \tag{9.1}$$

Las unidades del voltaje son *volts* ($1\,\text{V} = 1\,\text{J/C}$). Podemos encontrar además con esta definición la potencia eléctrica:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{q\Delta V}{t} = I\Delta V \tag{9.2}$$

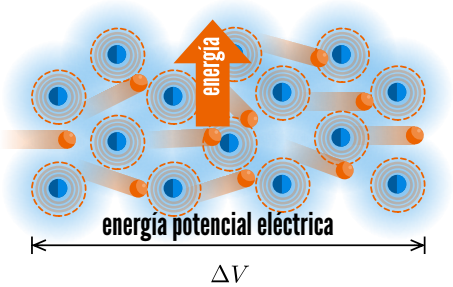


Figura 9.1: Conducción eléctrica en un metal (los electrones anaranjados están muy exagerados en tamaño)

En la fig. 9.1 observamos un material que permite el movimiento de electrones, es decir, que *conduce* corriente eléctrica. Los metales son, en general, buenos conductores porque sus electrones más externos se desprenden fácilmente. Al aplicarse un voltaje, los electrones sueltos comienzan a moverse, pues se les está aplicando una energía potencial eléctrica que se va convirtiendo en energía cinética. Sin embargo, los electrones colisionan constantemente con los átomos, disipando energía hacia el exterior (como ocurre, por ejemplo, en las cocinas eléctricas). Los electrones, entonces, se terminan moviendo con velocidad constante, en lugar de la aceleración que debería impartirles la fuerza eléctrica. Los hechos anteriores pueden ser resumidos en la siguiente ecuación experimental, llamada **ley de Ohm**:

$$\Delta V = IR \tag{9.3}$$

Lo que esta ecuación dice es que los materiales tienen una propiedad llamada **resistencia** R, medida en ohms ($1\,\Omega = 1\,\text{V/A}$), que hace que, al aplicar un voltaje ΔV, los electrones se muevan con velocidad constante, formando una corriente constante I. A una pieza de material que tiene una resistencia considerable la llamaremos **resistor**. Los resistores tienen muchas aplicaciones, entre ellas, en cocinas eléctricas y bombillos.

Aunque en la fig. 9.1 los electrones se mueven hacia la derecha, por definición, la corriente I va en la dirección contraria a la de los electrones, es decir, hacia la izquierda (esta es una definición tradicional).

9.2 Generación de corriente eléctrica y motores

Hay dos formas muy comunes de generar una corriente eléctrica: mediante una batería o mediante movimiento a través de un campo magnético.

Las **baterías** convierten energía química en energía potencial eléctrica, y producen un voltaje constante. Las baterías AA, por ejemplo (fig. 9.2), generan 1.5 V a partir de reacciones químicas.

Figura 9.2: Baterías AA. [PD]

Por otro lado, la electricidad que está disponible en casas y edificios no es generada con baterías, sino utilizando movimiento y campos magnéticos. En la §6.3 vimos cómo las cargas eléctricas en movimiento generan campos magnéticos. Lo contrario también es cierto: el movimiento a través de un campo magnético puede generar corrientes eléctricas. Consideremos un alambre cerrado de forma rectangular como el de la fig. 9.3, inmerso en un campo magnético constante $\vec{\mathbf{B}}$. El alambre se hace girar con una rapidez angular ω (y por lo tanto, una velocidad tangencial $\vec{\mathbf{v}}$). La **ley de Faraday** (forma alternativa) dice que la fuerza magnética produce un voltaje en el interior del alambre:

$$\Delta V = \frac{W}{q} = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}}{q} = \frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}}{q} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$$

$$\implies \Delta V = (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} \tag{9.4}$$

Comparando esta ecuación con la ec. 9.1, observamos que el campo magnético *induce* un campo eléctrico

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{inducido}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{9.5}$$

En nuestro ejemplo de la fig. 9.3, según la regla de la mano derecha, el campo eléctrico inducido va a lo largo del alambre, lo que provoca que los electrones en su interior se muevan. Como los vectores son perpendiculares, la magnitud del campo eléctrico es $E = vB$, y como va en la misma dirección del desplazamiento, el producto punto nos da que el voltaje en el lado ab, de largo L, es vBL. Observemos que en el lado cd ocurre exactamente el mismo fenómeno, por lo que en total, según la ley de Faraday, el voltaje generado en el alambre cerrado es $\Delta V = 2vBL$.

Puntos clave

- Los voltajes se pueden generar con baterías por medio de reacciones químicas.
- Campos magnéticos en movimiento generan voltajes (generación de electricidad para consumo doméstico)
- Corrientes en campos magnéticos generan fuerza (motores)
- Circuitos eléctricos: caminos cerrados de corriente
- Reglas para resolver circuitos:
  - La corriente eléctrica se conserva
  - El voltaje se conserva

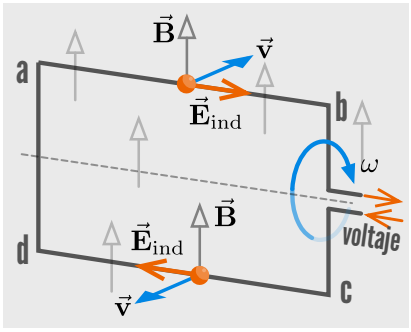


Figura 9.3: Ley de Faraday: generador

En un **generador eléctrico**, agua, viento, aire o vapor mueven una turbina que a su vez mueve alambres a través de un campo magnético, como en nuestro ejemplo, lo cual genera corriente eléctrica que llega hasta los usuarios. Mencionamos brevemente, sin embargo, que el voltaje generado no es constante como el de la batería, sino variable, puesto que el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ va cambiando a medida que se rota el alambre. A este tipo de voltaje y corriente generados se les llama *corriente alterna*, y al voltaje constante generado por una batería, *corriente directa*. Mediante dispositivos especiales, es posible transformar un tipo de corriente en otro. Los dispositivos electrónicos como celulares, por ejemplo, usan exclusivamente corriente directa, por lo que necesitan un cargador que convierta la corriente alterna del tomacorriente en corriente directa.

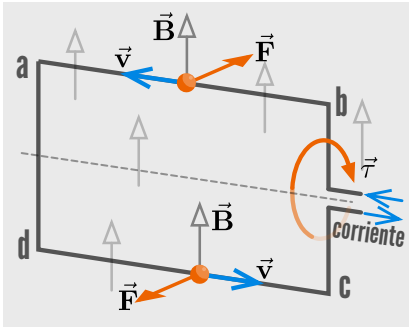


Figura 9.4: Motor eléctrico

En la fig. 9.4 tenemos también un alambre inmerso en un campo magnético, pero esta vez se alimenta con una corriente alterna externa. Como lo estudiamos en la §6.4, los electrones en el alambre experimentarán una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, la cual, según la regla de la mano derecha y el diagrama, va perpendicular al plano del alambre. Observemos que las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}$ producen un torque $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, lo que rota el alambre: este es el principio de funcionamiento del **motor eléctrico**.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

9.3 Circuitos eléctricos

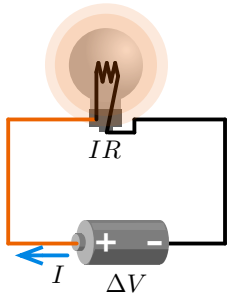


Figura 9.5: Circuito sencillo con un resistor

Un **circuito eléctrico** es un camino cerrado por donde se mueve una corriente. Un *alambre ideal* es aquel que no tiene resistencia. En la fig. 9.5 mostramos un circuito muy sencillo, donde una batería está conectada mediante un alambre ideal a un resistor que funciona como bombillo. Las baterías tienen dos extremos: uno positivo y otro negativo. La corriente en el circuito va desde el extremo positivo de la batería hasta su extremo negativo (que, como mencionamos, por definición, es la dirección contraria del movimiento de los electrones).

Hay dos principios importantes (ambos ya conocidos de capítulos anteriores) que se aplican para analizar circuitos:

- La carga se conserva, por lo que la corriente (carga por unidad de tiempo) también se conserva.
- La energía eléctrica se conserva, por lo que el voltaje (energía eléctrica por unidad de carga) también se conserva.

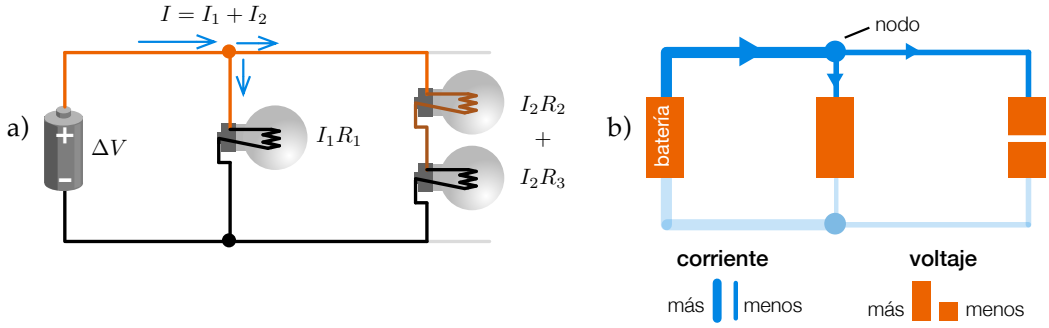


Figura 9.6: a) Ilustración de un circuito eléctrico. b) Esquema simplificado del circuito.

En la fig. 9.6 mostramos un circuito eléctrico. Vamos a aplicar los dos principios anteriores a este circuito. La corriente I sale desde la parte positiva de la batería, y llega un punto donde se divide en dos (I_1 e I_2): a este punto se le llama *nodo*. La corriente que entra a un nodo es igual a la que sale de él:

$$I = I_1 + I_2$$

Por otro lado, la energía potencial eléctrica que aporta la batería es utilizada por el resistor R_1. Además, esa misma energía potencial eléctrica es compartida entre los resistores R_2 y R_3 (este hecho se observa mejor en la fig. 9.6b). Entonces, los voltajes son los mismos en cada parte del circuito, y el voltaje de cada resistor se calcula con la ley de Ohm:

$$\Delta V = I_1R_1 = I_2R_2 + I_2R_3$$

estas ecuaciones forman un sistema del que se pueden despejar incógnitas dependiendo de los datos dados.

Ejemplo 9.1. *Circuito de ejemplo.*

En el circuito de la fig. 9.6, suponga que $\Delta V = 1.5\,\text{V}$, $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ y $R_3 = 1\,\Omega$. a) Calcule las corrientes I, I_1 e I_2. b) Calcule la potencia disipada por el resistor R_3.

Solución: Sustituimos los valores numéricos en la conservación del voltaje:

$$1.5 = 4I_1 \implies I_1 = 0.38\,\text{A}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

$$1.5 = 2I_2 + I_2 \implies I_2 = 1.5/3 = 0.50\,\text{A}$$

Obtenemos la corriente I con $I = I_1 + I_2 = 0.88\,\text{A}$. El voltaje en la resistencia R_3 puede calcularse con la ley de Ohm:

$$\Delta V_3 = I_2 R_3 = 0.5\,\text{V}$$

con lo que la potencia disipada por el resistor R_3 la encontramos con la ec. 9.2:

$$P_1 = I_2 \Delta V_2 = 0.25\,\text{W}$$

Ejemplo 9.2. *Luces festivas.*

Un set de luces festivas que se usan para Navidad contiene 10 bombillos de resistencia R conectados a un voltaje ΔV como está en la fig. 9.7. Calcule: a) la corriente en el alambre; b) el voltaje en cada bombillo.

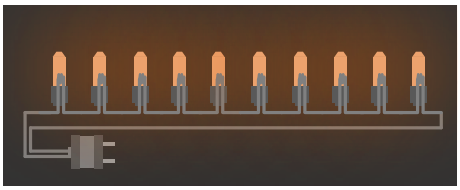


Figura 9.7: Luces festivas

Solución: Aplicamos conservación del voltaje:

$$\Delta V = IR + IR + IR + ... + 10 \text{ veces} = 10IR \implies I = \frac{\Delta V}{10R}$$

con lo que el voltaje en cada bombillo es

$$IR = \frac{\Delta V}{10R} R = \frac{\Delta V}{10}$$

Ejemplo 9.3. *Circuito doméstico.*

En la fig. 9.8 se muestra el funcionamiento del circuito eléctrico de una casa. De la compañía eléctrica llegan dos cables *vivos* con $+110\,\text{V}$ y $-110\,\text{V}$ medidos respecto a otro cable llamado *neutro*, a $0\,\text{V}$. Para conectar aparatos que funcionan a $110\,\text{V}$ se utiliza uno de los cables vivos y el neutro. Para conectar una cocina eléctrica de $220\,\text{V}$, en cambio, se utilizan ambos cables vivos de forma que el voltaje sea $\Delta V = 110 - (-100) = 220\,\text{V}$. Cada aparato doméstico extrae una cierta potencia de la red eléctrica, como está indicado en la figura. Calcule las corrientes I_0, I_1, I_2, I_3 e I_4.

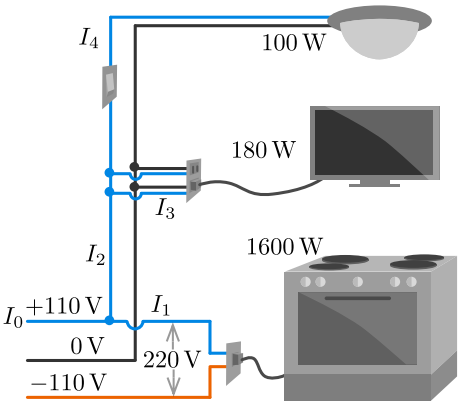


Figura 9.8: Circuito doméstico

Solución: De la conservación del voltaje aplicada en cada parte del circuito sabemos que el voltaje suministrado por la compañía eléctrica es el utilizado por cada aparato: el televisor y la lámpara usan $110\,\text{V}$, y la cocina, $220\,\text{V}$.

Podemos utilizar la ec. 9.2 para calcular la corriente extraída por cada aparato. La lámpara extrae una corriente de $I_4 = P_{\text{lámpara}}/\Delta V = 100/110 = 0.9\,\text{A}$; el televisor, una corriente $I_3 = P_{\text{telev}}/\Delta V = 180/100 = 1.8\,\text{A}$; y la cocina, $I_1 = 1600/220 = 7.3\,\text{A}$.

De la conservación de la corriente sabemos que

$$I_2 = I_3 + I_4 = 2.7\,\text{A}$$

y además,

$$I_0 = I_1 + I_2 = 10\,\text{A}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Como podemos observar en el ejemplo anterior, entre más aparatos se conecten al mismo tiempo, mayor será la la corriente que pase por los alambres principales. En este ejemplo, los alambres son ideales, pero en la realidad, tienen una resistencia que puede disipar mucha energía y causar un incendio. Veremos este caso en el siguiente ejemplo.

En la fig. 9.9 se muestran varios símbolos de uso común para los elementos de un circuito. Vamos a usar también estos símbolos en el siguiente ejemplo.

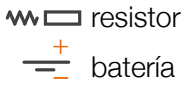


Figura 9.9: Símbolos estándar de los elementos de un circuito

Ejemplo 9.4. *Cable con resistencia.*

Se conectan dos resistores $R_2 = 2\,\Omega$ y $R_3 = 1\,\Omega$ en paralelo a una batería de $\Delta V = 9\,\text{V}$, como se muestra en la fig. 9.10a. El problema es que el cable que lleva la corriente desde la batería hasta los resistores es muy largo y no puede considerarse como ideal, sino que tiene una resistencia $R_1 = 0.5\,\Omega$. a) ¿Cuál es la corriente en cada alambre? b) ¿Cuál es el voltaje que llega hasta R_2? c) ¿Cuál es la potencia disipada por el cable largo?

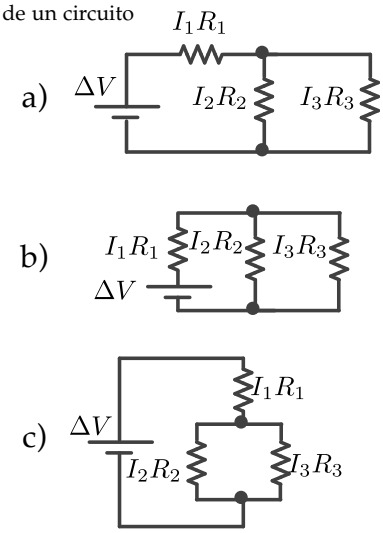


Figura 9.10: Cable con resistencia

Solución: Observemos que el circuito no tiene la forma como el de la fig. 9.6. Vamos a modificarlo ligeramente de dos formas distintas, y en ambos casos veremos que el resultado es el mismo. Primero, vamos a modificar el circuito de forma que se vea como en la fig. 9.10b. En este caso, la conservación de la corriente nos da que $I_1 = I_2 + I_3$. Para la conservación del voltaje, hay que tener el siguiente cuidado: la energía que aporta la batería es disminuida por el resistor R_1, por lo que su voltaje será negativo:

$$\Delta V - I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3$$

Ahora lo intentaremos de otra forma: deformamos el circuito como está en la fig. 9.10c. En este caso, la conservación de la corriente da lo mismo, es decir, $I_1 = I_2 + I_3$. Para hacer conservación del voltaje, debemos considerar los dos caminos que puede tomar la corriente: primero por I_1 y después por I_2 o bien primero por I_1 y después por I_3. En ambos casos, el voltaje es el mismo (e igual al aportado por la batería):

$$\Delta V = I_1R_1 + I_2R_2 = I_1R_1 + I_3R_3$$

pero esto es lo mismo que lo que habíamos obtenido antes con la fig. 9.10b. Vamos a sustituir los valores numéricos y formamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 9 = 0.5I_1 + 2I_2 \\ 9 = 0.5I_1 + I_3 \\ I_1 = I_2 + I_3 \end{cases}$$

a) Al resolver este sistema, obtenemos que

$$\begin{cases} I_1 = 7.71\,\text{A} \\ I_2 = 2.57\,\text{A} \\ I_3 = 5.14\,\text{A} \end{cases}$$

b) Con esto, obtenemos que el voltaje en R_2 es $\Delta V_2 = I_2R_2 = 5.14\,\text{V}$. c) El voltaje en el cable largo es $I_1R_1 = 3.85\,\text{V}$, por lo que la potencia que disipa es $29.7\,\text{W}$. Esta no es una potencia despreciable, y es por

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

esto que si los cables no son adecuados, pueden llegar a calentarse tanto como para producir un incendio.

9.4 Temperatura, fases y calor

Hemos discutido cómo la materia está formada por átomos, y cómo las fuerzas electrostáticas se encargan de formar moléculas, y luego, dependiendo de la magnitud de las fuerzas intermoleculares, se forman diferentes **fases**: sólidos, líquidos y gases. Ahora vamos a estudiar la materia desde la perspectiva de la energía cinética de las moléculas. Si la energía cinética es poca, se logran formar enlaces fuertes entre las moléculas y se produce un *sólido*. Si la energía cinética es mayor, los enlaces entre moléculas son solo temporales y se rompen con facilidad; esta fase es el *líquido*. Cuando la energía cinética es suficientemente grande, los enlaces entre moléculas nunca llegan a formarse, y estas se mueven con total libertad; esta fase es el *gas*.

Vamos a llamar **sistema** a alguna parte del universo que estudiamos, y al resto, lo llamamos **entorno**. Por ejemplo, un sistema podría ser una olla llena de agua, y parte del entorno, la cocina donde se encuentra. Llamamos **energía interna** de un sistema a la suma de las energías cinéticas de cada molécula:

$$E_{\text{int}} = \sum_{i=0}^{N} K_i$$

donde N es el número total de moléculas. Hay que considerar también como parte de la energía interna la energía química de los enlaces que forman la sustancia, pero durante este capítulo la vamos a despreciar.

Ahora, definiremos la **temperatura** (absoluta) de un sistema como una cantidad proporcional a su energía interna en ausencia de interacciones:

$$T \propto E_{\text{int}}$$

La unidad de temperatura absoluta en el sistema internacional es el kelvin (K). Observemos que si la energía interna de un sistema es cero (lo que implicaría que la energía cinética de las moléculas es cero), teóricamente, la temperatura absoluta es cero. Otra unidad de temperatura más comúnmente usada es el **grado Celsius** ($^\circ$C) , y se puede relacionar con la temperatura absoluta en kelvin con:

$$T_K = T_C + 273 \qquad \text{si } \mathcal{U}[T_K] = \text{K};\ \mathcal{U}[T_C] = {}^\circ\text{C}$$

La temperatura en Celsius es *relativa*, no absoluta, pues, como veremos, toma como referencia los cambios de fase del agua. No obstante, si restamos dos temperaturas en grados Celsius y en kelvin,

$$\Delta T = T_{K2} - T_{K1} = T_{C2} + 273 - T_{C1} - 273 = T_{C2} - T_{C1}$$

con lo que si una ecuación nos pide ΔT, podemos usar tanto Celsius como kelvin, pero si nos pide T, únicamente podremos usar kelvin.

Ahora definiremos **calor** como una *transferencia* de energía entre el sistema y su entorno. El calor aumenta la energía mecánica de las moléculas, pero no necesariamente implica un cambio de temperatura, pues puede usarse, por ejemplo, para romper enlaces entre moléculas en lugar de para incrementar su energía cinética.

En la fig. 9.11 mostramos cómo el calor va modificando gradualmente las fases del agua. En la figura también se muestran dos ecuaciones para

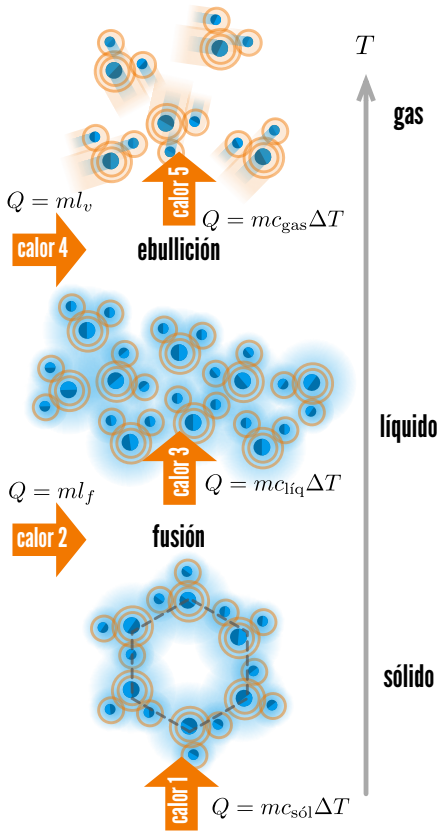


Figura 9.11: Fases de la materia (agua)

Puntos clave

- Fases: sólido, líquido y gas
- Sistema: parte del universo que es objeto de estudio
- Entorno: el resto del universo que no es el sistema
- Energía interna: suma de las energías mecánicas de cada molécula
- Temperatura: $T \propto E_{\text{int}}$ (sin interacciones entre moléculas)
- Calor: transferencia de energía entre sistema y entorno
- Calor para aumento de temperatura: $Q = mc\Delta T$ (signos automáticos)
- Calor para cambio de fase: $Q = \pm ml$
- Conservación de la energía: $\sum Q = 0$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

el calor: la del calor 1, 3 y 5, y la del calor 2 y 4. La primera la llamaremos **calor para cambio de temperatura**, y su ecuación es

$$Q = mc\Delta T \tag{9.6}$$

donde m es la masa, ΔT es el cambio de temperatura (en grados Celsius o kelvin) y c es el *calor específico*, una constante que depende de la sustancia, de la fase en la que se encuentre, y de las condiciones del entorno (si la transferencia ocurre a presión o a volumen constante). Si la temperatura aumenta, el calor es positivo, y si la temperatura disminuye, el calor es negativo; el signo lo da automáticamente la diferencia de temperaturas. El calor siempre fluye de la temperatura mayor hacia la menor; el enfriamiento se produce al ceder calor al entorno (cuando alguien dice que por una ventana "se va a meter el frío" está hablando de forma incorrecta; se debería decir "se va a salir el calor").

La segunda ecuación, la del calor 2 y 4, la llamaremos **calor para cambio de fase**:

$$Q = \pm ml \tag{9.7}$$

donde l es una constante llamada *calor latente*, y depende de la sustancia y el cambio de fase que ocurra (fusión o vaporización). El signo $+$ se elige si la sustancia se funde o vaporiza (se necesita energía para romper enlaces), y el signo $-$ se usa cuando la sustancia se solidifica o condensa (se libera energía para poder formar los enlaces). Como podemos observar en la fig. 9.11, al añadir calor se aumenta la temperatura hasta que se alcanza un cambio de fase: en ese punto, por más calor que añadamos, ya no se incrementará la temperatura sino hasta que el cambio de fase haya terminado. En el caso de un sólido que se transforma a líquido, ese punto se llama *punto de fusión*, y en el caso de un líquido que se transforma a gas, *punto de ebullición o vaporización*. El agua, por ejemplo, en condiciones estándar, tiene un punto de fusión de 0 °C y un punto de ebullición de 100 °C. La escala Celsius es precisamente relativa a estos valores, pues los toma como referencia en lugar de la energía interna del sistema. Los valores de c y l para el agua se encuentran en la tabla 9.1.

calor específico	J kg^{-1} K^{-1}
hielo	2100
agua líq.	4186
vapor	2010
calor latente	**J/kg**
fusión	333 000
vaporización	2 260 000

Tabla 9.1: Valores de c y l para el agua, cuando el calor se añade a presión constante (abierto a la atmósfera).

Mencionamos además que en determinadas condiciones del entorno, las sustancias pasan directamente de sólido a gas y viceversa; a este fenómeno se le llama *sublimación*. En la fig. 9.12 se muestra, por ejemplo, una copa donde se ha puesto *hielo seco*, que es dióxido de carbono sólido que se sublima, convirtiéndose en gas.

Figura 9.12: Sublimación del dióxido de carbono. [CC-BY 2010 flickr:Alon]

Ejemplo 9.5. *Refrigerador.*

Un molde para hielo, como el que se dibuja en la fig. 9.13 tiene cinco compartimentos que se llenan con una masa $m = 0.02\,\text{kg}$ de agua cada uno, a $T_0 = 20\,^\circ\text{C}$ y se pone en un congelador a $T = -5\,^\circ\text{C}$. ¿Cuánto calor extrae el refrigerador para formar el hielo?

Solución: Debemos calcular el calor para que la temperatura del agua baje hasta 0 °C, luego, el calor para que el agua se congele, y por último para que el agua, ya hecha hielo, baje su temperatura hasta $-5\,^\circ\text{C}$. Podemos entender un poco mejor este proceso con el diagrama de la fig. 9.14. Observemos que en ese diagrama, el calor de cambio de fase es una recta horizontal porque la temperatura no cambia. La masa total por congelar es $m_T = 5m = 0.1\,\text{kg}$ (cinco cubos de hielo).

$$Q_3 = m_T c_{\text{agua líq}} \Delta T = 0.1 \cdot 4186 \cdot (0 - 20) = -8372\,\text{J}$$

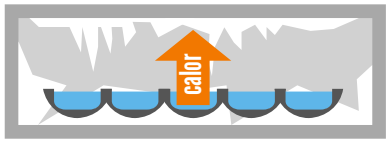


Figura 9.13: Refrigerador

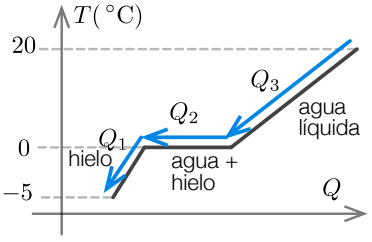


Figura 9.14: Diagrama del congelamiento del agua

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

$$Q_2 = -m_T l_f = -33\,300\,\text{J}$$

(elegimos el signo menos porque para congelarse, el agua debe liberar calor)

$$Q_1 = m_T c_{\text{hielo}} \Delta T = 0.1 \cdot 2100 \cdot (-5 - 0) = -1050\,\text{J}$$

con lo que el calor total que debe extraer el refrigerador es

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = -42\,722\,\text{J}$$

Ejemplo 9.6. *Sopa.*

Se coloca una olla (masa: 0.5 kg, $c = 910\,\text{J kg}^{-1}\,\text{K}^{-1}$) en una hornilla de 1500 W y se vierte en ella 1 kg de agua a 20 °C, con el propósito de hacer sopa. ¿Cuánto tiempo tardará el agua en llegar a su punto de ebullición?

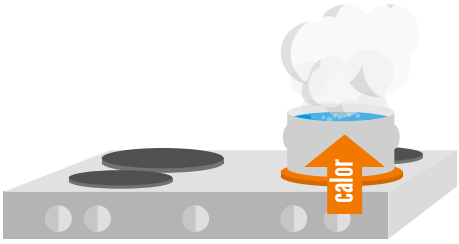


Figura 9.15: Sopa

Solución: El calor necesario para llevar el agua desde 20 °C hasta 100 °C es

$$Q_{\text{agua}} = m_{\text{agua}} c_{\text{agua liq}} \Delta T = 1 \cdot 4186 \cdot (100 - 20) = 334\,880\,\text{J}$$

y el calor necesario para llevar la olla desde 20 °C hasta 100 °C es

$$Q_{\text{olla}} = m_{\text{olla}} c_{\text{olla}} \Delta T = 0.5 \cdot 910 \cdot (100 - 20) = 36\,400\,\text{J}$$

El calor total es $Q = Q_{\text{olla}} + Q_{\text{agua}} = 371\,280\,\text{J}$. La potencia es energía por unidad de tiempo, con lo que puede calcularse el tiempo:

$$P = \frac{Q}{t} \implies t = \frac{Q}{P} = \frac{371\,280}{1500} = 248\,\text{s} = 4.1\,\text{min}$$

Cuando un sistema A está en contacto con otro sistema B, se intercambian calor hasta que en algún punto ambos ya no tendrán más calor para intercambiar. En ese punto, ambos sistemas tendrán la misma energía interna, y por lo tanto la misma temperatura ($T_A = T_B$). A ese punto se le llama **equilibrio térmico**. Por conservación de la energía, el calor que A le da a B es el mismo que B recibe de A:

$$|Q_A| = |Q_B|$$

como Q_A es negativo, la ecuación anterior es lo mismo que

$$-Q_A = Q_B$$

con lo que podemos escribir la conservación de la energía también como

$$Q_A + Q_B = 0 \implies \sum_i Q_i = 0$$

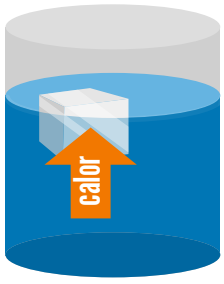


Figura 9.16: Bebida

Ejemplo 9.7. *Bebida.*

A un vaso de $m_a = 0.5\,\text{kg}$ de té frío (lo podemos considerar como agua), que se encuentra a $T_a = 20\,°\text{C}$, le añadimos un trozo de $m_h = 0.05\,\text{kg}$ de hielo a $T_h = 0\,°\text{C}$. Si cuando la bebida llega al equilibrio vemos que todo el hielo se derrite, y suponiendo que no se pierde

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

calor al entorno, calcule la temperatura de equilibrio de la bebida.

Solución: En el diagrama de la fig. 9.17 se muestran los intercambios de energía necesarios para llegar al equilibrio térmico. Puesto que todo el hielo se derrite al final, necesariamente la temperatura de equilibrio T_{eq} debe ser mayor que cero. Aplicamos conservación de la energía:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$
$$+m_h l_f + m_h c_a (T_{\text{eq}} - T_h) + m_a c_a (T_{\text{eq}} - T_a) = 0$$

(observemos que en Q_2, la masa es la del hielo derretido, el calor específico es el del agua). Sustituyendo los valores numéricos,

$$16650 + 209.3(T_{\text{eq}} - 0) + 2093(T_{\text{teq}} - 20) = 0$$

resolviendo la ecuación,

$$T_{\text{eq}} = 10.9\,^{\circ}\text{C}$$

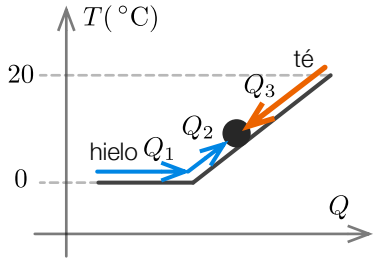


Figura 9.17: Diagrama para calcular equilibrio térmico.

Debido a que el calor aumenta la energía cinética de las moléculas, estas toman más espacio para moverse en el espacio, y por ende se produce una **expansión térmica**. La expansión térmica permite construir termómetros, como en la fig. 9.18, donde un líquido se expande y contrae con la temperatura. En la misma figura mostramos también varias escalas de temperatura, incluyendo la *escala Fahrenheit*, cuya conversión con la escala Celsius es

$$T_C = (T_F - 32) \times \frac{5}{9} \qquad \text{si } \mathcal{U}[T_C] = {}^{\circ}\text{C}; \quad \mathcal{U}[T_F] = {}^{\circ}\text{F}$$

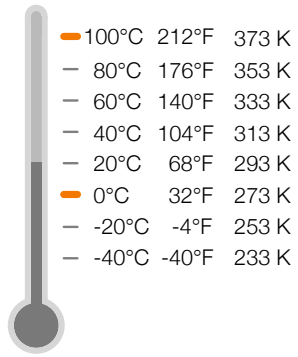


Figura 9.18: Termómetro

9.5 Gas ideal

Un gas se dice que es *ideal* si sus moléculas no interactúan. Los gases ideales quedan completamente descritos por las siguientes propiedades (ver fig. 9.19):

- volumen V,
- presión p, que como sabemos, es causada por las colisiones de las moléculas contra el recipiente,
- cantidad de moléculas N, y
- temperatura *absoluta* T, que como vimos, es proporcional a la suma de energías cinéticas de las moléculas

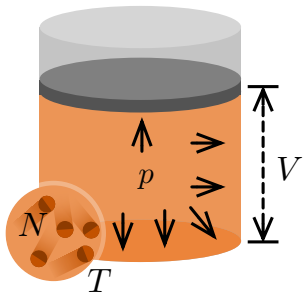


Figura 9.19: Gas ideal

Un **estado** es un conjunto de valores numéricos de las propiedades anteriores. Los gases ideales siempre cumplen con la **ecuación de estado** del gas ideal, la cual dice que

$$pV = Nk_B T \tag{9.8}$$

donde $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\text{m}^2\,\text{kg}\,\text{s}^{-2}\,\text{K}^{-1}$ es la *constante de Boltzmann*. Esta ecuación fue encontrada de forma experimental, y luego confirmada con un modelo teórico.

Puntos clave

- Ecuación de estado del gas ideal: $pV = Nk_B T$ o bien $pV = nRT$; se aplica por separado en cada estado en donde se encuentre el gas.
- Mol: conjunto de $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ moléculas.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 9.8. *Moléculas de aire en una habitación.*

Calcule la cantidad de moléculas de aire que hay en una habitación cúbica de 3 m de lado, a una atmósfera (presión de 10^5 Pa), y con una temperatura de 20 °C.

Solución: Aplicamos la ec. 9.8, recordando que la temperatura es absoluta y por ende es obligatorio convertirla a kelvin, y que el volumen es el lado de la habitación al cubo:

$$N = \frac{pV}{k_B T} = \frac{10^5 \cdot 3^3}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot (20 + 273)} = 6.68 \cdot 10^{26} \text{ moléculas}$$

La ec. 9.8 tiene la desventaja que requiere conocer cuántas moléculas tiene un sistema. Podemos definir una unidad llamada **mol** como un conjunto de $6 \cdot 10^{23}$ moléculas (a este número se le llama *número de Avogadro*, N_A), de forma que el número de moléculas sea un múltiplo de esa cantidad:

$$N = nN_A$$

con esto, la ecuación de estado del gas ideal queda

$$pV = nN_A k_B T$$

ahora definimos $R = N_A k_B = 8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$, con lo que queda

$$pV = nRT \tag{9.9}$$

Figura 9.20: Globo meteorológico. [PD NOAA]

Ejemplo 9.9. *Globo meteorológico.*

Se llena un globo meteorológico esférico con 130 mol de helio a 20 °C de temperatura y con una presión atmosférica de 10^5 Pa. a) ¿Cuál será el radio del globo? b) El globo subirá hasta una altura tal que la presión exterior se reduce a la mitad, y la temperatura baja a −50 °C. ¿Cuál será ahora el volumen del globo?

Solución: a) Calculamos el volumen del globo:

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{80 \cdot 8.31 \cdot (20 + 273)}{10^5} = 3.17 \text{ m}^3$$

con lo que calculamos el radio como

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0.91 \text{ m}$$

b) Volvemos a utilizar la ecuación de estado con $p = 0.5 \cdot 10^5$ Pa y $T = -50 + 273 = 223$ K:

$$V = \frac{nRT}{p} = 4.82 \text{ m}^3$$

$$\implies r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 1.05 \text{ m}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 9.10. *Botella de agua en el Irazú.*

Una botella vacía de $1L = 0.001\,\mathrm{m}^3$ se cierra bien en la cima del volcán Irazú y se transporta hasta Cartago. Al llegar a Cartago, debido a la diferencia de presión atmosférica, la botella se abolla, reduciendo su volumen en 10 %. Si la presión atmosférica en Cartago es de 99 200 Pa, y las temperaturas en el Irazú y Cartago son, respectivamente, 10 °C y 25 °C, calcule la presión en el Irazú.

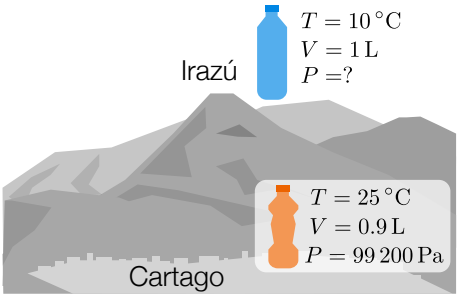


Figura 9.21: Volcán Irazú

Solución: Como el volumen se reduce en un 10 %, el volumen en Cartago es $0.9\,\mathrm{L} = 9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$. Las temperaturas son $T_I = 273 + 10 = 283\,\mathrm{K}$ y $T_C = 273 + 25 = 298\,\mathrm{K}$. En Cartago y en el Irazú se cumple por separado la ecuación de estado del gas ideal:

$$p_I V_I = nRT_I$$

$$p_C V_C = nRT_C$$

Como la botella está cerrada, la cantidad de moles es la misma en ambos lugares. Despejando nR de ambas ecuaciones e igualando, obtenemos

$$\frac{p_I V_I}{T_I} = \frac{p_C V_C}{T_C}$$

con lo que

$$p_I = \frac{p_C V_C}{T_C}\frac{T_I}{V_I} = 84\,786\,\mathrm{Pa}$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

10 Ondas y física moderna

10.1 Ondas mecánicas viajeras

Una **onda** es un tipo de movimiento que provoca transmisión de energía, y se repite constantemente en el tiempo y en el espacio. Si tomamos una cuerda que descansa sobre una mesa, como en la fig. 10.1, y comenzamos a agitarla de un lado a otro con un movimiento armónico simple, generamos una onda sobre la cuerda, cuya forma en este caso es como la de una función seno o coseno. La primera cosa que notamos es que la onda va propagándose hacia la derecha, pero en cambio, las partículas que forman la cuerda tienen desplazamiento total cero, pues regresan una y otra vez al punto desde donde partieron. Las ondas solo transmiten energía, pero no materia.

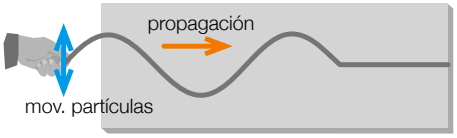


Figura 10.1: Ondas en una cuerda

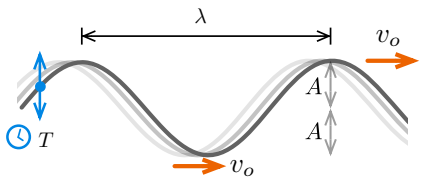


Figura 10.2: Onda viajera transversal

En la fig. 10.2 tenemos una onda como la que describimos antes. Los puntos más altos de la onda se llaman *crestas*, y los más bajos, *valles*. La distancia entre dos crestas, o entre dos valles, o entre dos puntos cualesquiera que se repitan se llama **longitud de onda** λ. El patrón de la onda se repite cada cierto tiempo T llamado **periodo**, que por cierto, es el mismo periodo con el que se agita la mano en movimiento armónico simple en la fig. 10.1. Asimismo, la frecuencia es $f = 1/T$. La velocidad de transmisión de la onda la podemos calcular como

$$v_o = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{10.1}$$

pues una cresta recorre una distancia λ en un tiempo T. Asimismo, la **amplitud de la onda**, A, tal y como ocurre en el movimiento armónico simple, es la distancia máxima que se desplazan las partículas respecto al punto de equilibrio.

Ejemplo 10.1. *Olas en el mar.*

Un barco se desplaza verticalmente 3 m en total hacia arriba y hacia abajo cada 6 s debido a las olas del mar. a) ¿Cuál es la amplitud de las olas? b) Si dos crestas de la ola están separadas por 30 m, ¿cuál es la velocidad de propagación? c) ¿Cuál es la rapidez media recorrida del movimiento vertical del barco?

Solución: a) El desplazamiento total del barco hacia arriba y abajo es el doble de la amplitud (ver fig. 10.2), por lo que $A = 3/2 = 1.5\,\text{m}$. b) El periodo de la onda es de 6 s, pues es el periodo de oscilación del barco, y la longitud de onda es la distancia entre dos crestas. Según la ec. 10.1, $v_o = \lambda/T = 30/6 = 5\,\text{m/s}$. c) Al subir y bajar, el barco cubre una distancia A en un periodo T, por lo que su rapidez media recorrida es $v_{\text{barco}} = A/T = 0.25\,\text{m/s}$. Esta última también es la velocidad de las moléculas de agua al pasar las olas.

Puntos clave

- Onda: movimiento que provoca transmisión de energía (se repite en el tiempo y el espacio)
- Longitud de onda: distancia entre crestas o entre valles
- Periodo: tiempo que pasa para que se repita la onda
- Hay dos velocidades:
  - Velocidad de las partículas que propagan la onda
  - Velocidad de propagación de la (forma de la) onda, $v_o = \lambda f$
- La velocidad de propagación depende de las características del medio: $v_o = \sqrt{F/(m/L)}$
- Ondas transversales: las partículas se mueven perpendicularmente a la onda (fig. 10.1)
- Ondas longitudinales: las partículas se mueven en la misma dirección que la onda (fig. 10.4)

Las ondas producidas en la fig. 10.1 se llaman **ondas transversales**, debido a que el movimiento de las partículas es siempre perpendicular a la velocidad de propagación de la onda. En la fig. 10.3 vemos una persona que empuja varios sistemas masa–resorte que están acoplados, inicialmente en reposo. Como vemos, la energía potencial U del resorte de la izquierda se transmite hacia el resorte de la derecha. El modelo de la fig. 10.3 se podría utilizar para hacer una simulación de una **onda longitudinal**, es decir, una onda donde las partículas se mueven en la misma dirección de la velocidad de propagación. Como vemos en la fig. 10.3, la fuerza elástica mueve las masas Δm que están distribuidas cada cierta longitud promedio ΔL. Entre mayor sea la fuerza elástica, mayor será la velocidad de propagación, pues se producirá más aceleración; mientras que si cada partícula tiene una masa mayor, la misma fuerza produciría menor aceleración, y por ende, menor velocidad de propagación. Utilizando el modelo de la fig. 10.3 para hacer una simulación, obtenemos una ecuación para la rapidez de propagación:

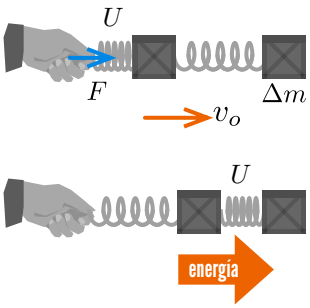


Figura 10.3: Osciladores acoplados

$$v_o = \sqrt{\frac{F}{m/L}} \tag{10.2}$$

donde m es la masa total de la cuerda; L, su longitud total; y F, la tensión a la que está sometida. Esta ecuación es válida tanto para ondas longitudinales como para transversales.

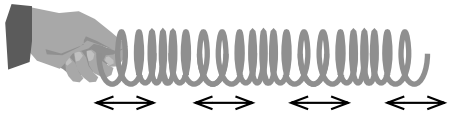


Figura 10.4: Onda longitudinal

Ejemplo 10.2. *Cuerda estirada.*

Una cuerda de 9 m de largo tiene una masa de 1.2 kg, y se tensa a 100 N. Una persona mueve la cuerda como en la fig. 10.1 con una frecuencia de 10 Hz. a) ¿Con qué rapidez se propagan las ondas por la cuerda? b) ¿Cuál es la longitud de onda producida?

Solución: a) Con la ec. 10.2 podemos encontrar la rapidez de propagación:

$$v_o = \sqrt{\frac{100}{1.2/9}} = 27.4\,\text{m/s}$$

b) Nuevamente, aplicamos la ec. 10.1 para obtener:

$$\lambda = \frac{v_o}{f} = \frac{27.4}{10} = 2.74\,\text{m}$$

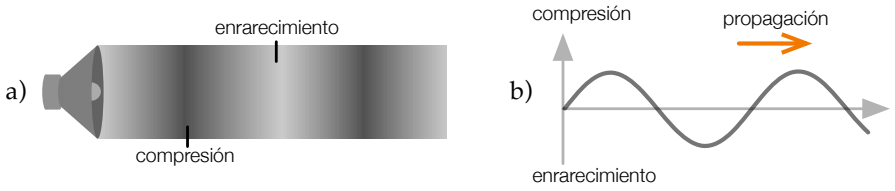


Figura 10.5: Sonido

Las ondas sonoras son longitudinales. En la fig. 10.5 mostramos la producción de ondas sonoras por medio de un parlante. El aire se estira y se comprime repetidamente, por lo que las ondas sonoras están formadas por pequeñas variaciones en la presión del aire. La rapidez de propagación de las ondas sonoras en el aire es aproximadamente de

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

$v_s = 340\,\text{m/s}$. La frecuencia de las ondas sonoras es lo que nuestro oído percibe como la *nota musical*. Las notas musicales más graves tienen frecuencias más bajas, y las más agudas, frecuencias más altas.

Ejemplo 10.3. *Trompeta.*

Un trompetista toca la nota Sol3, que corresponde a una frecuencia de 392 Hz, en un teatro de 50 m de largo. a) ¿Cuál es la longitud de onda producida? b) ¿Cuánto tiempo tarda el sonido para llegar a la última fila del teatro?

Solución: a) $v_s = \lambda f \implies \lambda = v_s/f = 0.87\,\text{m}$. b) La onda sonora se desplaza con rapidez constante, por lo que $v_s = \Delta x/\Delta t \implies \Delta t = \Delta x/v_s = 50/340 = 0.15\,\text{s}$.

La amplitud de una onda sonora está relacionada con cuán fuerte o suave se escucha un sonido: una amplitud mayor produce un sonido más fuerte y viceversa. Al colocar la mano sobre un parlante, por ejemplo, podemos darnos una idea sobre la amplitud de una onda sonora; entre más fuerte suene el parlante, mayor serán las vibraciones sentidas.

10.2 Interferencia y ondas estacionarias

Cuando lanzamos una piedra en un lago tranquilo, se forman ondas circulares en la superficie, como en la fig. 10.6. Como podemos observar en la figura, las ondas tienen una forma que puede ser difícil de describirla matemáticamente. Sin embargo, cuando no se requiere tanto detalle, se pueden hacer dos aproximaciones. La primera consiste en trazar líneas sobre las crestas de la onda, llamadas **frentes de onda** (fig. 10.6c). La segunda aproximación consiste en trazar líneas perpendiculares a los frentes de onda llamadas **rayos** (fig. 10.6d). La aproximación de rayos tiene menos información que la de frentes de onda; puede ser utilizada cuando únicamente nos interesa la dirección de propagación de la onda.

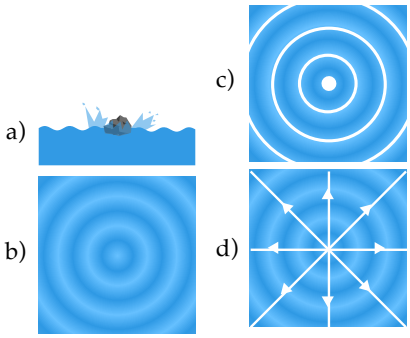


Figura 10.6: a) Piedra lanzada en un estanque (vista lateral). b) Vista desde arriba de las ondas. c) Aproximación de frentes de onda. d) Aproximación de rayos.

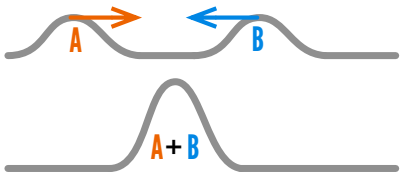


Figura 10.7: Superposición de dos ondas

Cuando dos ondas A y B se encuentran (fig. 10.7), se produce una **superposición**, es decir que ambas ondas forman una *onda resultante* en la que las posiciones de cada partícula se suman. La onda resultante puede tener una amplitud mayor, menor o igual a las ondas A y B, incluso puede ocurrir que ambas ondas se cancelen y la amplitud resultante sea cero.

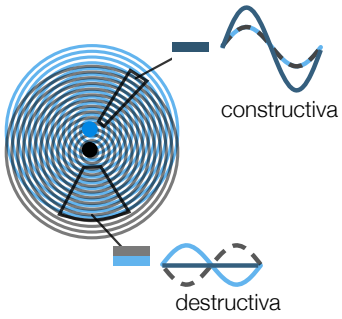


Figura 10.8: Interferencia de dos ondas

Imaginemos ahora que se tiran dos piedras en un estanque tranquilo, al mismo tiempo. Ambas piedras generan ondas, cuyos frentes de ondas son círculos concéntricos (fig. 10.8). El resultado es un fenómeno llamado *interferencia* y es muy común en todo tipo de ondas. Como puede verse en la fig. 10.8, hay lugares donde dos crestas se juntan, y en ese caso producen una *interferencia constructiva*. En la fig. 10.8, esto corresponde a las partes más claras del patrón que se forma. En cambio, en los puntos donde un valle y una cresta se juntan, se produce una *interferencia destructiva*, y la ondas se cancelan entre sí. En la fig. 10.8, esto corresponde a las partes más oscuras del patrón formado. A partir del patrón de interferencia producido por dos ondas, se puede obtener información sobre las fuentes que las producen.

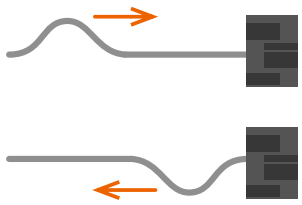


Figura 10.9: Reflexión de una onda al encontrarse con una pared

En la fig. 10.9 mostramos onda que viaja por una cuerda que está amarrada a una pared. Cuando la onda se encuentra con la pared, se refleja, invirtiéndose y viajando en la dirección opuesta. Podemos pensar que la onda se invierte debido a que cuando colisiona contra la

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

pared, la cuerda le hace una fuerza hacia arriba, pero, por tercera ley de Newton, la pared deberá entonces hacerle a la cuerda una fuerza hacia abajo.

Una persona agita ligeramente una cuerda cuyo extremo está amarrado a una pared, como en la fig. 10.10a. Entonces, como sabemos, la onda se reflejará y se superpondrá a la onda original. La onda resultante se llama **onda estacionaria**, y tiene la característica de que hay puntos de la cuerda que no se mueven, y otros que se mueven más que los demás. Los extremos de la cuerda, por ejemplo, no se mueven, y reciben el nombre de **nodos**. El punto del centro de la cuerda, en cambio, es el que se mueve más, y se llama *antinodo*. Este es el movimiento que se produce, por ejemplo, en la cuerda de una guitarra.

Observamos en la fig. 10.10a también que la onda no logra completar una longitud de onda, sino que en la longitud de la cuerda, L, solo cabe media longitud de onda:

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

Entonces, la frecuencia producida en esta cuerda es

$$f = \frac{v_o}{\lambda} = \frac{v_o}{2L}$$

A esta forma de moverse la cuerda se le llama **primer armónico**.

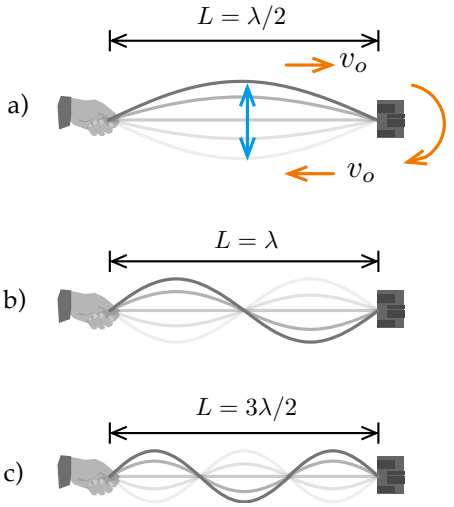


Figura 10.10: Ondas estacionarias

Ejemplo 10.4. *Guitarra.*

Una cuerda Sol de guitarra tiene una longitud $L = 0.66\,\text{m}$ y una masa $m = 1.07 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}$. Si el primer armónico de la cuerda debe sonar con una frecuencia $f = 196\,\text{Hz}$ (Sol3), a) ¿cuál es la velocidad de propagación de la onda? b) ¿A qué tensión debe ajustarse la cuerda? c) Ahora el guitarrista pone su dedo en uno de los trastes, de forma que la longitud efectiva de la cuerda se reduce a la mitad (fig. 10.11). ¿Qué frecuencia tocará ahora la guitarra?

Solución: a) Sabemos que, en el primer armónico, $\lambda = 2L = 2 \cdot 0.66 = 1.32\,\text{m}$. Con esto, $v_o = \lambda f = 258.7\,\text{m/s}$. b) La tensión la encontramos con la ec. 10.2: $F = v_o^2 m/L = 108.5\,\text{N}$. c) En este caso, $L = 0.66/2 = 0.33\,\text{m}$, con lo que $\lambda = 2L = 0.66\,\text{m}$. Ahora, la frecuencia producida será $f = v_o/\lambda = 392\,\text{Hz}$, el cual corresponde al Sol4.

Figura 10.11: Guitarra. [PD]

El primer armónico no es la única onda estacionaria que puede ocurrir en la cuerda como la de una guitarra. En la fig. 10.10b se muestra el **segundo armónico**, donde cabe una longitud de onda entera, y donde hay dos antinodos. En este caso,

$$L = \lambda \implies f = \frac{v_o}{L}$$

Además, el **tercer armónico**,

$$L = \frac{3\lambda}{2} \implies f = \frac{2v_o}{3L}$$

que contiene tres antinodos, etcétera. En la cuerda de una guitarra real, sin embargo, se producen los armónicos al mismo tiempo (de forma superpuesta), siendo el primero el que domina más, y al que identificamos con la nota musical que escuchamos. La combinación única de armónicos de cada instrumento es lo que escuchamos como *timbre*.

Puntos clave

- Cuando dos ondas se encuentran, se produce una superposición
- La interferencia de dos ondas puede ser constructiva o destructiva
- Al reflejarse una onda viajera, se producen ondas estacionarias
- En una onda estacionaria, hay puntos que se mueven más (antinodos), y otros que no se mueven (nodos)
- En el primer armónico, cabe media longitud de onda: $L = \lambda/2$
- En el segundo armónico, cabe una longitud de onda: $L = \lambda$
- En el tercer armónico, cabe una y media longitudes de onda: $L = 3\lambda/2$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Ejemplo 10.5. *Armónicos.*

Calcule las longitudes de onda y frecuencias de los primeros tres armónicos de una cuerda de 0.03 kg de masa total y 0.4 m de largo tensada a 80 N.

Solución: La rapidez de propagación es $v_o = \sqrt{F/(m/L)} = 32\,\text{m/s}$. Según la fig. 10.10, las longitudes de onda de los primeros tres armónicos son:

$$\lambda_1 = 2L = 0.8\,\text{m}; \qquad \lambda_2 = L = 0.4\,\text{m}; \qquad \lambda_3 = 2L/3 = 0.27\,\text{m}$$

y las frecuencias sería entonces

$$f_1 = \frac{v_o}{\lambda_1} = 40\,\text{Hz}; \qquad f_2 = \frac{v_o}{\lambda_2} = 80\,\text{Hz}; \qquad f_3 = \frac{v_o}{\lambda_3} = 119\,\text{Hz}$$

10.3 Ondas electromagnéticas

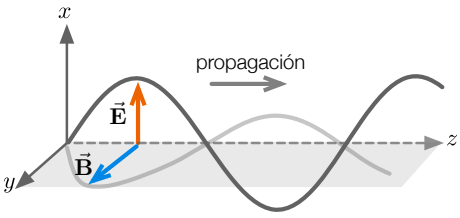


Figura 10.12: Onda electromagnética

Una **onda electromagnética** consiste en campos eléctricos y magnéticos oscilando, llevando consigo energía (fig. 10.12). Como se observa en la figura, el campo eléctrico siempre es perpendicular al campo magnético, y ambos son a su vez perpendiculares a la dirección de propagación, por lo que las ondas electromagnéticas son ondas transversales.

Al tomar las ecuaciones del electromagnetismo que vimos en los capítulos anteriores (ley de Coulomb, ley de Ampère, ley de Faraday y el hecho de que el campo magnético solo se presenta en forma de dipolos) y combinarlas, se puede demostrar que se producen ondas electromagnéticas. James Clerk Maxwell fue el primero en hacerlo, en 1865.

Las ondas electromagnéticas no necesitan de un medio para propagarse. En el vacío, se propagan con una rapidez

$$c \approx 3.0 \cdot 10^8\,\text{m/s} \tag{10.3}$$

En otros medios, la velocidad de propagación es diferente, siempre menor que la del vacío. En el aire, sin embargo, usualmente se puede tomar como c.

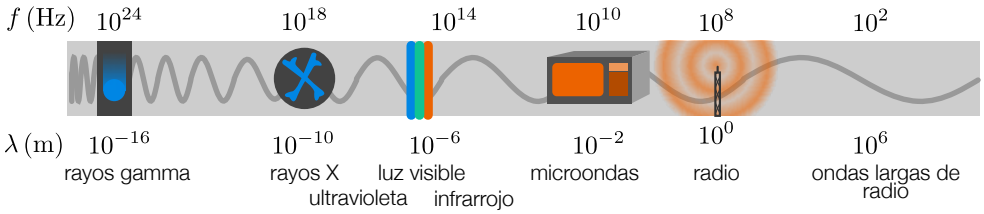


Figura 10.13: Espectro electromagnético

La luz visible es una onda electromagnética; los colores son la forma en la que percibimos las distintas longitudes de onda. El rojo, por ejemplo, tiene una longitud de onda larga, y el azul, una longitud de onda corta. La luz visible, sin embargo, forma apenas un pequeño rango de las ondas electromagnéticas existentes. De ahora en adelante, llamaremos simplemente *luz* a todas las ondas electromagnéticas, visibles o no; y *luz visible* a las ondas electromagnéticas que son visibles por el ojo humano.

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Las diferentes longitudes de ondas de la luz forman un *espectro*, el cual está graficado en la fig. 10.13. Los rayos gamma ocurren naturalmente en eventos astronómicos de alta energía, y también son producidos durante la fisión nuclear. Los rayos X son conocidos por sus múltiples aplicaciones médicas (radiografías, tomografías axiales computarizadas), así como su uso en la seguridad de aeropuertos. La luz visible está rodeada por los rayos ultravioleta (de longitud de onda más corta que el azul, y por tanto, no visibles), y los infrarrojos (de longitud de onda más larga que el rojo). Los hornos microondas utilizan, obviamente, microondas para cocinar; la *radiación cósmica de fondo*, residual de una época cercana al Big Bang, también es en microondas. Las ondas de radio se utilizan principalmente para la comunicación de radio, televisión y celular.

En la fig. 10.14 se ilustra una *onda esférica*, en la cual, la propagación ocurre radialmente hacia afuera. En una onda esférica, los frentes de onda son esferas.

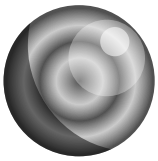


Figura 10.14: Onda esférica

Vamos a definir la **intensidad** de una onda como la potencia P (energía transmitida por la onda por unidad de tiempo) que atraviesa un área A:

$$I = \frac{P}{A} \tag{10.4}$$

las unidades de la potencia son, entonces, $\mathrm{W/m^2}$. En el caso de una onda esférica, el área que atraviesan las ondas es el área de un frente de onda, es decir, el área de una esfera:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \tag{10.5}$$

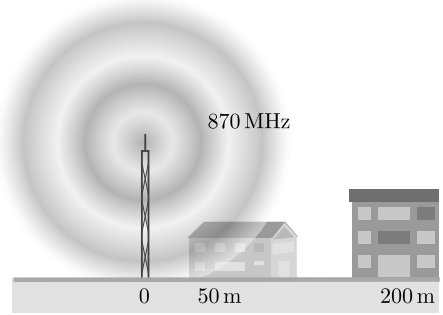


Figura 10.15: Radio

Ejemplo 10.6. *Radio.*

Una radio transmite en una frecuencia de 870 MHz (fig. 10.15) con una antena de un 1 kW. a) ¿Cuál es la longitud de onda de la señal? b) ¿Cuál es la intensidad con la que se recibe la señal en una casa ubicada a 50 m de distancia de la antena? c) ¿Cuál es la intensidad con la que se recibe la señal en un edificio ubicado a 200 m de distancia de la antena?

Solución: a) $\lambda = c/f = 3\cdot 10^8/870\cdot 10^6 = 0.34\,\mathrm{m}$. b) $I_1 = P/(4\pi r_1^2) = 0.032\,\mathrm{W/m^2}$. c) $I_2 = P/(4\pi r_2^2) = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{W/m^2}$. Dentro de los circuitos de las radios, la señal es amplificada y convertida a sonido.

10.4 Óptica geométrica: reflexión

En esta sección utilizaremos más la aproximación de rayos para estudiar el comportamiento de la luz ante distintos materiales. Una de las consecuencias importantes de que la luz viaje como un rayo es lo que ocurre cuando ingresa a una *camera obscura* (fig. 10.16), que consiste en una caja cerrada, donde la luz puede entrar solamente por un pequeño agujero. Como podemos observar, los rayos viajan en línea recta, y se forma una imagen invertida que se proyecta en una de las paredes de la caja. En una cámara fotográfica, los rayos primero pasan por una lente, y se proyectan en un sensor de imágenes electrónico que convierte la imagen en información digital.

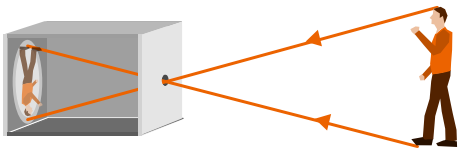


Figura 10.16: *Camera obscura*, o formación de imágenes en una cámara.

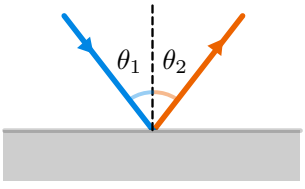


Figura 10.17: Reflexión

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

Cuando un rayo de luz choca contra una superficie (fig. 10.17), este se refleja con el mismo ángulo con el que incide:

$$\theta_1 = \theta_2$$

Este enunciado suele llamarse **ley de la reflexión**. Como veremos en la §10.6, podemos pensar en la luz como compuesta de pequeñas partículas llamadas *fotones*, por lo que al colisionar contra una superficie reflectante, como un espejo, ocurre una colisión elástica, similar a la del ejemplo 8.6, donde habíamos demostrado precisamente que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Es importante mencionar que, en la fig. 10.16, hemos dibujado los rayos como saliendo de la persona, aunque en realidad, los rayos salen de una fuente de luz (como una lámpara o el Sol), se reflejan en la persona, y de allí salen hacia la cámara.

Ejemplo 10.7. *Espejo para verse completamente.*

¿Cuál debe ser la altura mínima de un espejo para que una persona de altura h se pueda ver de cuerpo entero?

Solución: En la fig. 10.18 se muestra un diagrama de la situación. Para que la persona pueda ver su imagen, los rayos que salen desde la cabeza deben reflejarse, por lo que un extremo del espejo debe colocarse en esa posición. Por otro lado, los rayos que salen desde los pies deben reflejarse en el espejo también para poder ser vistos por la persona. En la figura, entonces, $\theta_1 = \theta_2$, lo que implica que los triángulos ABD y BCD deben ser iguales. Esto significa necesariamente que la altura mínima del espejo debe ser $h/2$. Observemos que esta respuesta no depende de la distancia a la que se encuentre la persona, debido a que al alejarse o acercarse la persona, también se aleja o acerca su imagen.

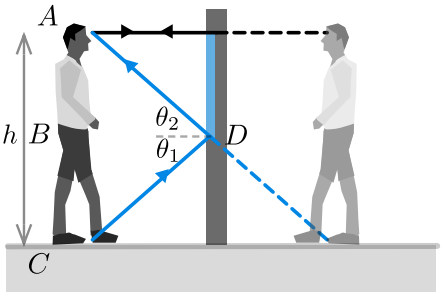


Figura 10.18: Espejo plano para verse completamente

Ejemplo 10.8. *Desviación de la luz con espejos.*

Se desvía un rayo incidente con un ángulo $\alpha = 60°$, como se encuentra en la fig. 10.19, por medio de un espejo que está inclinado con un ángulo $\phi = 45°$. ¿Cuál es el ángulo β?

Solución: Para encontrar el ángulo β nos servimos del triángulo de la figura. De allí, $\theta = 90° - 60° = 30°$, y $\epsilon + \theta + (180° - \phi) = 180°$, con lo que $\epsilon = \phi - \theta = 45° - 30° = 15°$. Con esto, $\beta = 90° - \epsilon = 75°$.

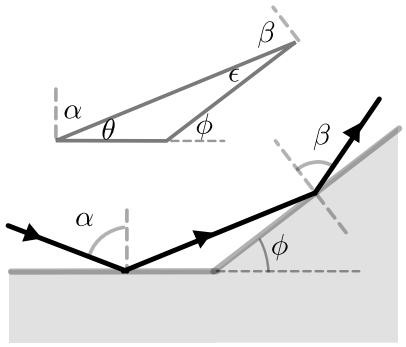


Figura 10.19: Desviación de la luz con espejos

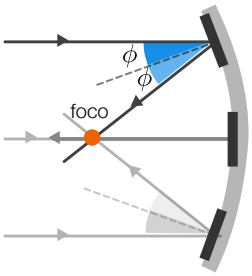


Figura 10.20: Espejo curvo cóncavo

Si se colocan varios espejos sobre una superficie curva como en la fig. 10.20, la reflexión de los rayos los concentrará en un solo punto, llamado *foco*. Este fenómeno se utiliza en telescopios y antenas satelitales, por ejemplo, donde se intentan capturar rayos distantes (que llegan en forma paralela), y se concentran en un solo punto donde son procesados. El tipo de espejo de la fig. 10.20 se llama *cóncavo*, es decir, tiene una superficie reflectora en su parte interna. Si la superficie reflectora está en la parte externa, como en la fig. 10.21, los rayos reflejados más bien se separan cada vez más; su prolongación, sin embargo, como se ve en la figura, forma un "foco virtual". Este tipo de espejos, que muestra imágenes de tamaño más pequeño pero con mayor campo de visión, se utiliza frecuentemente en las tiendas para vigilar a los clientes, o bien en los espejos retrovisores de los carros para tener un mayor campo de visión.

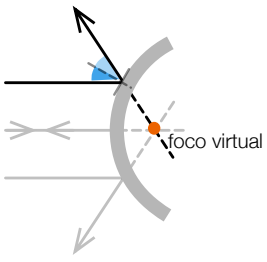


Figura 10.21: Espejo curvo convexo

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

10.5 Óptica geométrica: refracción y dispersión

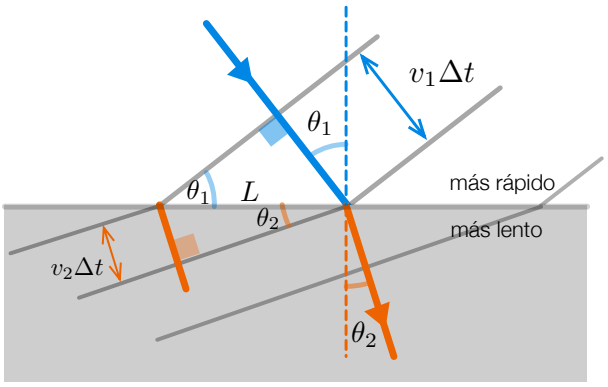


Figura 10.22: Refracción

Puntos clave

- La luz es una onda electromagnética
- Espectro electromagnético: las diferentes frecuencias/longitudes de ondas electromagnéticas
- La luz viaja siempre con velocidad $c = 3 \cdot 10^8$ m/s en el vacío
- Intensidad: $I = P/A$; para ondas esféricas, $A = 4\pi r^2$
- Reflexión: el ángulo de incidencia es el mismo que el reflejado
- Refracción: la luz se desvía al atravesar diferentes medios
- Índice de refracción: $n = c/v$
- Ley de Snell (refracción): $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
- Los espejos cóncavos y las lentes convergentes concentran rayos en un punto llamado *foco*.
- Los espejos convexos y las lentes divergentes alejan los rayos, que parecen provenir desde un punto llamado *foco virtual*.

Como dijimos anteriormente, la luz viaja con velocidades diferentes en cada medio, y estas velocidades siempre son menores que la velocidad de la luz en el vacío, c. En la fig. 10.22 observamos frentes de onda que se mueven desde un medio donde la velocidad de la luz es más rápida (v_1) hasta otro donde se hace más lenta (v_2). Como podemos observar, los frentes de onda están separados por una longitud de onda, $\lambda_1 = v_1\Delta t$ y $\lambda_2 = v_2\Delta t$. Queremos una expresión que relacione el ángulo θ_1 con el ángulo θ_2. Para ello, observamos que se forman dos triángulos rectángulos, que comparten un lado en común, L. Ahora,

$$\sin\theta_1 = \frac{v_1\Delta t}{L}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{v_2\Delta t}{L}$$

con lo que, despejando L en ambas ecuaciones, igualándolas, y cancelando la Δt, tenemos que

$$\frac{v_2}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{\sin\theta_1}$$

Ahora, definimos el **índice de refracción** de cada medio como

$$n = \frac{c}{v} \tag{10.6}$$

con lo que obtenemos una ecuación llamada **ley de Snell**:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{10.7}$$

Ejemplo 10.9. *Refracción en vidrio.*

Un rayo de luz que viaja en el agua ($n_1 = 1.33$) se encuentra con vidrio ($n_2 = 1.65$) y se refracta con un ángulo $\theta_2 = 35°$, como en la fig. 10.22. ¿Cuál es el ángulo de incidencia?

Solución: Aplicamos la ec. 10.7 para obtener

$$\sin\theta_1 = \frac{n_2 \sin\theta_2}{n_1} \implies \sin\theta_1 = 0.712 \implies \theta_1 = \arcsin(0.712) = 45.4°$$

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

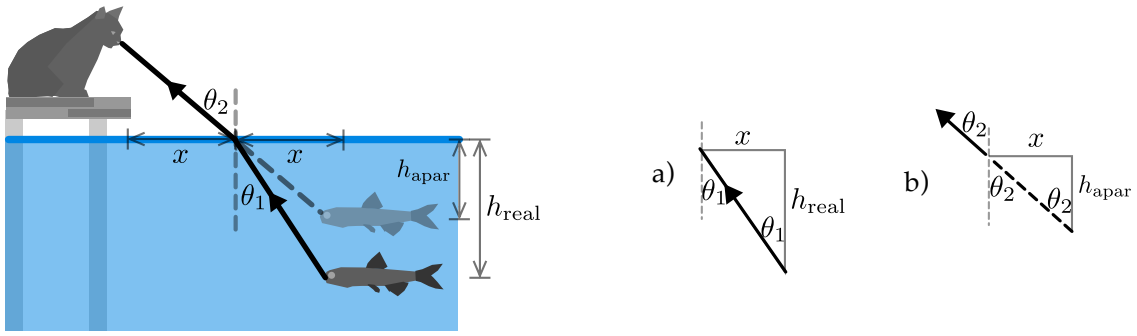


Figura 10.23: Gato que mira a un pez

Ejemplo 10.10. *Gato que mira a un pez.*

Un gato observa a un pez, como se encuentra en la fig. 10.23. Debido a la refracción de la luz cuando sale del agua, el pez parece estar más cerca de la superficie de lo que realmente está. Si $x = 1\,\text{m}$, $n_1 = 1.33$ y $n_2 = 1$ y $h_{\text{real}} = 1.6\,\text{m}$, a) ¿cuál es el ángulo de incidencia θ_1? b) ¿Cuál es el ángulo refractado θ_2? c) ¿A qué profundidad cree el gato que está el pez?

Solución: a) Formamos un triángulo rectángulo como el de la fig. 10.23a, con el que obtenemos

$$\tan\theta_1 = \frac{x}{h_{\text{real}}} \implies \theta_1 = \arctan\left(\frac{1}{1.6}\right) = 32^\circ$$

el cual es el ángulo de incidencia.

b) Ahora, utilizamos la ley de Snell (ec. 10.7):

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \implies \sin\theta_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2} = 0.7$$

con lo que $\theta_2 = \arcsin 0.7 = 44^\circ$

c) La profundidad aparente h_{apar} del pez se obtiene prolongando el rayo que sale del agua, pues el gato cree que los rayos viajan siempre en línea recta. De esta forma, formamos un triángulo rectángulo como el de la fig. 10.23b, con el que obtenemos que

$$\tan\theta_2 = \frac{x}{h_{\text{apar}}} \implies h_{\text{apar}} = \frac{x}{\tan\theta_2} = 1.0\,\text{m}$$

En efecto, el gato cree que el pez está más cerca de la superficie de lo que realmente está. Esta es la misma razón por la que al introducir una pajilla en una bebida, la pajilla parece doblarse.

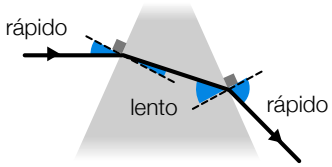


Figura 10.24: Refracción en lentes

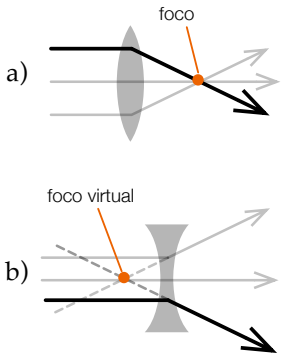


Figura 10.25: Lentes: a) convergente; b) divergente

De los dos ejemplos anteriores podemos concluir que si un rayo de luz pasa de un medio más rápido a uno más lento ($n_2 > n_1$), el rayo se "cierra", es decir, su ángulo de refracción es menor que el de incidencia ($\theta_2 < \theta_1$), y viceversa. Utilizando esto, podemos ver lo que ocurre dentro de un pedazo de vidrio cuya parte inferior es más ancha que la inferior, como el de la fig. 10.24. Un rayo de luz se desvía al toparse con el vidrio, haciendo un menor ángulo con la normal al vidrio. El rayo sigue viajando por el vidrio, y llega a la otra cara, donde pasa de un medio

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

más lento (vidrio) a uno más rápido (aire), por lo que el rayo se desvía aún más, en un ángulo mayor respecto a la normal que el que traía.

Este fenómeno se usa para hacer **lentes** (fig. 10.25); observando que la parte superior de la lente de la fig. 10.25a y la parte inferior de la lente de la fig. 10.25b se parecen a la fig. 10.24. Las lentes cuyos rayos converjen en un solo punto (el *foco*) forman una *lente convergente* (fig. 10.25a). En cambio, si los rayos refractados se separan mutuamente de forma que sean las prolongaciones de los rayos las que se encuentran en un solo punto, llamado *foco virtual*, constituyen una *lente divergente* (fig. 10.25b).

Lo que nuestro ojo percibe como luz blanca es en realidad una combinación de longitudes de ondas (colores) que nos llegan al mismo tiempo a la retina (así mismo, el negro es ausencia de luz). No obstante, en muchos medios, la velocidad de la luz no es la misma para todas las longitudes de onda, sino que varía, de forma que las diferentes longitudes de onda que forman la luz blanca se separan, como en la fig. 10.26. A este fenómeno se le llama **dispersión de frecuencias**, y es el responsable de la formación de los arcoíris.

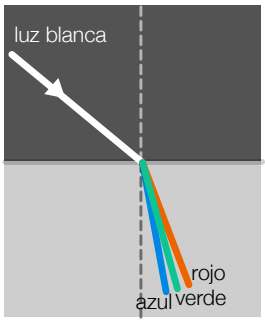


Figura 10.26: Dispersión de frecuencias de la luz

10.6 Física moderna

Relatividad especial

Una de las consecuencias experimentales de la propagación de la luz, que a finales del siglo XIX fue considerada muy extraña, es que la velocidad de la luz c en el vacío es constante, sin importar la velocidad del observador que la mida.

En la fig. 10.27 tenemos dos personas, S y P, en movimiento relativo. La persona P se mueve con velocidad v constante, relativa a S. Ahora, ambas personas encienden una lámpara. Según lo que vimos en la §2.9, la velocidad de la luz en S es c, y en P, debería ser $c + v$. Sin embargo, eso no es lo que ocurre: ambos observadores miden que la luz viaja a una velocidad c. Este principio fue utilizado por Albert Einstein en 1905 para formular la **relatividad especial**, la cual predice que para que ambos observadores, S y P, midan la misma velocidad de la luz, sus percepciones del espacio y el tiempo deben ser diferentes para cada uno.

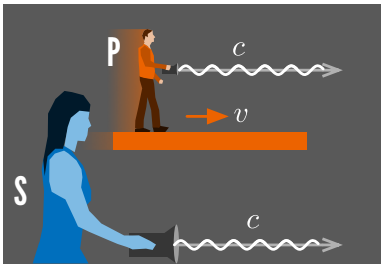


Figura 10.27: Relatividad especial

Vamos a ilustrar la relatividad especial con la fig. 10.28. Una nave espacial en movimiento M que contiene dos personas, A y B, se mueve a través del espacio con una velocidad $v = 10^8\,\mathrm{m/s}$ respecto a la Tierra en reposo relativo R. En un instante dado, A lanza un rayo de luz a B, el cual viaja una distancia $c\Delta t_M$ visto desde la nave. Sin embargo, visto desde la Tierra, el rayo más bien viajó una distancia $c\Delta t_R$, debido a que la nave estaba en movimiento. Si desde la Tierra, el rayo tardó un tiempo $\Delta t_R = 0.001\,\mathrm{s}$, ¿cuánto tiempo tardó el rayo visto desde la nave en movimiento? Para responder esto, observemos que en la fig. 10.28 se forma un triángulo rectángulo, al cual podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

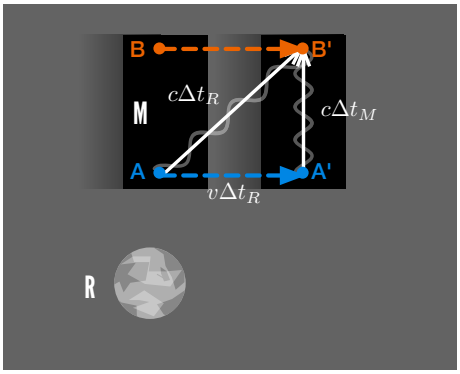


Figura 10.28: Dilatación del tiempo

$$(c\Delta t_R)^2 = (v\Delta t_R)^2 + (c\Delta t_M)^2$$

con el que obtenemos que $\Delta t_M = 0.000943\,\mathrm{s}$. Esto significa que el tiempo pasó más lentamente para las personas que se encontraban en la nave respecto al tiempo en la Tierra; es decir, se produjo una *dilatación del tiempo*. Otra de las consecuencias de la relatividad especial es la *contracción de la longitud*, y, al analizar el teorema trabajo–energía cinética

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org

con relatividad, la existencia de una energía que contiene toda la materia, aún en reposo, la famosa ecuación $E = mc^2$. Los efectos relativistas en escala humana suelen ser despreciables, aunque deben tenerse en cuenta al tratar masas o velocidades muy grandes.

Mecánica cuántica

En la fig. 10.13, habíamos mostrado el espectro electromagnético, y en la ec. 10.4 definimos la intensidad, es decir, la energía transmitida por las ondas por unidad de tiempo y área, o bien, qué tan concentradas están las ondas electromagnéticas en un área. No obstante, también es posible ver la luz como constituida por pequeñas partículas llamadas **fotones**, los cuales tienen una **energía intrínseca**, independiente de su intensidad, la cual está dada por la ecuación experimental

$$E = hf \tag{10.8}$$

donde $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J s es la *constante de Planck*, y f es la frecuencia. Mediante esta ecuación, es posible entender la peligrosidad de las diferentes frecuencias de la luz. La luz visible, por ejemplo, no tiene suficiente energía como para atravesar nuestra piel, aunque sí el vidrio o una hoja de papel. Los rayos ultravioleta, en cambio, tienen mayor frecuencia que la luz visible y por ende mayor energía intrínseca, pudiendo penetrar nuestra piel. Los rayos X utilizados en radiografías tienen aún mayor frecuencia, y por tanto mayor energía intrínseca, por lo que pueden no solo atravesar la piel, sino los músculos, pero no los huesos; la luz se refleja en ellos y se toma la radiografía. El problema con la penetración de estos tipos de radiación en nuestro cuerpo es que interactúan con las células, potencialmente causando daños en ellas que a su vez causan cáncer. Los rayos gamma tienen la mayor frecuencia, y por ende, la mayor energía intrínseca y son mucho más peligrosos para la vida. Por otro lado, los rayos infrarrojos y las microondas no tienen mucha energía intrínseca; utilizan en cambio mucha intensidad para poder ser usados para cocinar.

Así como las ondas de luz pueden verse como partículas, también las partículas de materia exhiben propiedades similares a las de las ondas, sin embargo, siempre a escalas muy pequeñas, inferiores 10^{-10} m.

Cuando existe una partícula en una región con energía potencial, como un electrón en un átomo, la "onda de materia" se comporta muy parecido a las ondas estacionarias que vimos en la §10.2: solo se admiten ciertos valores de alguna cantidad física (en una cuerda, solo ciertas longitudes de onda forman una onda estacionaria).

En el caso del átomo, las "ondas de materia" solo admiten ciertos valores del radio de la órbita del electrón, llamados *orbitales*, como se muestra en la fig. 10.30. Para que un electrón cambie de un orbital a otro, debe emitir o absorber un fotón de una longitud de onda específica. Es por eso que, al analizar la luz emitida por un átomo de hidrógeno, como se muestra en la fig. 10.30, aparecen líneas de un color más fuerte que el resto, debidas al cambio de orbital de los electrones. Mediante el análisis de la luz emitida y absorbida por las sustancias se puede determinar su composición química; a esto se llama *espectroscopía*.

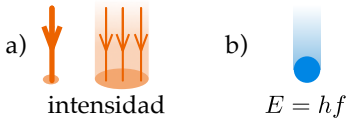


Figura 10.29: Energía de la luz: a) intensidad; b) energía intrínseca

Puntos claves

- La relatividad especial se basa en que la velocidad de la luz en el vacío es siempre c para todos los observadores, sin importar su velocidad relativa
- Consecuencias de la relatividad especial: las percepciones del espacio y el tiempo son diferentes para diferentes observadores
- Fotones: partículas de luz
- Energía de la luz: intrínseca ($E = hf$) e intensidad
- Mecánica cuántica: la materia exhibe propiedades parecidas a las de las ondas en escalas inferiores a 10^{-10} m
- Mecánica cuántica: los electrones de un átomo existen en orbitales, y cuando cambian de orbital, emiten o absorben un fotón, formando un espectro.
- Los espectros permiten determinar la composición química de las sustancias.

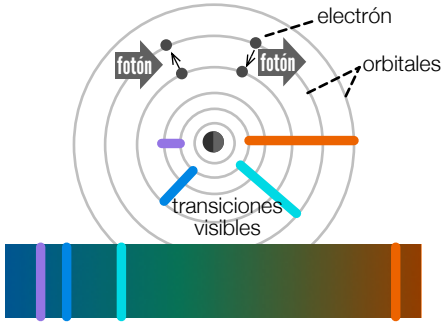


Figura 10.30: Parte visible del espectro del átomo de hidrógeno

© CC-BY-NC-SA 2017 André Oliva, gandreoliva.org